

School of Mathematical Sciences בית הספר למדעי המתמטיקה
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (20.09.2019)

משך המבחן: שלוש שעות
 אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

1. הוכיחו שלכל $n, 1 \leq n$, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, ומצאו את ערכי n שעבורם יש שוויון.

2. (א) מצאו את כל המספרים הממשיים המקיימים את המשוואה $\log_4 x + \log_8 x + \log_{64} x = 3$
 (ב) מהי קבוצת כל המספרים הממשיים המקיימים את אי-השוויון $\log_2 x - \log_{1/2} x > 3$

3. נתונים ארבעת המספרים המרוכבים: $u = 0$, $v = 2 + i$, $w = -1 + 2i$, $z = v + w$.
 הוכיחו שארבע הנקודות במישור המרוכב הנקבעות על ידי מספרים אלה מהוות קדקודים של ריבוע
 וחישבו את שטחו.
 לעזרתכם: $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$

4. לגבי כל אחד משני האי-שוויונות הבאים מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים המקיים אותו

(א) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| \leq x-5$
 (ב) $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| \leq x+5$

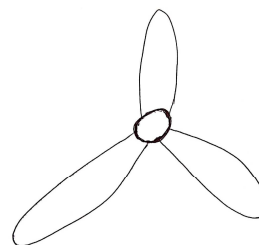
5. תהי P קבוצת כל התת קבוצות (לרבות הקבוצה הריקה והקבוצה כולה) של הקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ותהי $f: P \rightarrow N = \{0, 1, 2, \dots\}$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(A) = |A|$ (כלומר, ערך הפונקציה ב"נקודה" A הוא מספר האיברים בתת-הקבוצה A).
 (א) קבעו: האם הפונקציה f היא חד-חד-ערכית? האם היא על? האם היא הפיכה?
 (ב) הוכיחו: $f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$ לכל $A, B \in P$ וקבעו באילו תנאים מתקיים שוויון.



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

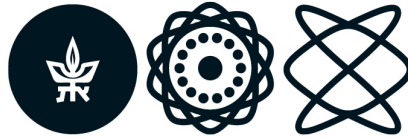
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

6. נתון פרח המורכב מליבה עגולה וסביבה שלושה עלים מופרדים זה מזה (אף עלה אינו נוגע בעלה אחר, אך כל עלה נוגע בליבה) כבציון המצורף. צביעה קבילה של הפרח היא צביעה אשר בה אזורים עם גבול משותף נצבעות בצבעים שונים.



- (א) בכמה צביעות קבילות שונות תוכלו לצבוע את הפרח כשלתכם שלושה צבעים?
(ב) כיצד תשתנה תשובתכם לחלק א' אם שתי צביעות - השונות זו מזו אך ורק בסיבוב הפרח ב-120 מעלות סביב מרכז עיגול הליבה שלו - תחשבנה כאותה צביעה?
(ג) כיצד תשתנינה תשובותיכם לחלק א' אם בשונה מהנ"ל שניים מעלי הפרח נוגעים זה בזה והעלה השלישי מופרד מהם (וכל היתר לא משתנה)?

ב ה צ ל ח ה



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב