School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות

מבחן סיווג במתמטיקה (10.01.2020)

1. סיסמה של כרטיס אשראי מורכבת מ-4 ספרות (מספרים שלמים מ-0 עד 9) היכולות לחזור על עצמן. אותן ספרות בסדר שונה נחשבות לסיסמאות שונות.
א. מהו המספר הכולל של סיסמאות שונות ?
ב. בכמה מהן לא מופיעה הספרה 1 ?
ג. בכמה מהן מופיעה לפחות אחת הספרות 3 או 7 ?

פתרון: א. לכל ספרה בסיסמה יש 10 אפשרויות שאינן תלויות בבחירת הספרות האחרות ולכן - לפי כלל המכפלה - מספרן הכולל של הסיסמאות השונות הוא $10^4 = 10,000$.

ב. בהרכבת סיסמה שבה סיפרה אחת ספציפית (למשל, הספרה1) אינה מופיעה, יש לכל ספרה בסיסמה 9 אפשרויות בלתי תלויות זו בזו ובסך הכל $9^4 = 81^2 = (80+1)^2 = 6,400+160+1=6,561$ סיסמאות שונות שאין בהן הספרה 1.

ג. השלילה הלוגית (המשלים הקבוצתי) של "לפחות אחת" הוא "אף אחת". משיקול דומה לזה שבסעיפים א' ו-ב', מספר הסיסמאות השונות שאין בהן **אף אחת** מהספרות 3 ו-7 הוא $8^4 = 64^2 = (60+4)^2 = 4,096$. לפיכך, מספר הסיסמאות השונות המבוקש בסעיף זה הוא $10,000 - 4,096 = 5,904$.

2. א. מצאו את כל הפתרונות הממשיים של המשוואה $x^{\log_2 x} = \frac{1}{4}x^3$ $(0 < x)$

ב. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים x שעבורם $\sqrt{3^{x^2-3x} - \frac{1}{9}} < \frac{2\sqrt{2}}{3}$

פתרון: א. שוויון של מספרים שקול לשוויון הלוגריתמים שלהם (ביחס לאותו בסיס) ולפיכך המשוואה הנתונה שקולה לשוויון הלוגריתמים של אגפיה ביחס לבסיס 2 (לנוחיותנו) :

$$\log_2 x\cdot\log_2 x=\log_2(\frac{1}{4}x^3) \iff (\log_2 x)^2 = \log_2\frac{1}{4} + 3\log_2 x \iff y^2-3y+2=0 \ \ (y\equiv\log_2 x)$$

ומתקבלת משוואה ריבועית בנעלם $y = \log_2 x$ שפתרונה (פתרו): $y = \log_2 x = 2 \ or 1$ ומכאן שפתרונות המשוואה הנתונה הם $x = 4$ ו- $x = 2$.

ב. נבדוק תחילה מתי הביטוי מתחת לשורש הוא אי שלילי (כך שהשורש שלו הוא מספר ממשי):

$$3^{x^2-3x} - \frac{1}{9} \ge 0 \iff 3^{x^2-3x} \ge \frac{1}{9} = 3^{-2} \iff x^2-3x \ge -2 \iff x^2-3x+2=(x-1)(x-2) \ge 0$$

וזה קורה כאשר $2 \le x$ או $1 \ge x$ המבטיחים ששני הגורמים במכפלה האחרונה הם שווי סימן כך שהמכפלה אי שלילית כדרוש.

אי שוויון בין מספרים חיוביים שקול לאי שוויון בין ריבועיהם ולפיכך אי השוויון הנתון שקול לאי השוויון

$$3^{x^2-3x}-\frac{1}{9}<(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2=\frac{8}{9} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x^2-3x}<1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x=x(x-3)<0$$

וזה קורה כאשר ורק כאשר x ו-$x-3$ שוני סימן (אחד חיובי והאחר שלילי), כלומר או ש-x חיובי ו-$x-3$ שלילי שפרושו $0<x<3$, או להפך - x שלילי ו- $x-3$ חיובי, אבל אין בנמצא מספרים כאלה ולכן אין כאן תרומה נוספת לקבוצה המבוקשת. מסקנה: קבוצת כל המספרים הממשיים המקיימת את אי השוויון היא $\{(-\infty,1]\cup[2,\infty)\}\cap(0,3)=(0,1]\cup[2,3)$.

3. הוכיחו שלכל מספר טבעי $1\le n$, המספר $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ אף הוא מספר טבעי.

פתרון: אפשר לתת הוכחה אינדוקטיבית, אבל בחרנו להציג הוכחה אחרת, פשוטה וקצרה יותר.

$$\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)=\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$$

המונה של הביטוי האחרון הוא מכפלה של שלושה מספרים טבעיים עוקבים ולכן אחד מהם מתחלק ב-3 ולפחות אחד מהם הוא זוגי (הסבירו מדוע ומתי יש שני גורמים זוגיים ומתי רק אחד, וגם מתי אחד הגורמים ואיזה מהם מתחלק ב-6) ולפיכך המכפלה מתחלקת ב-$2\cdot3=6$ ומתקבל מספר טבעי.

4. על הישר הממשי נתונות הקבוצות $B=\{x\in R:|x-4|=1\}$ $\quad A=\{x\in R:|x^2-\frac{1}{2}|\le\frac{1}{2}\}$

א. כתבו את הקבוצות במפורש (כקטעים, איחודם של קטעים, נקודות מבודדות וכיו"ב) וסמנו אותן על ישר שתציירו במחברת המבחן.

ב. נגדיר את הקבוצות $D=\{a\cdot b: a\in A,\, b\in B\}$ $\quad C=\{a+b: a\in A,\, b\in B\}$

עשו לקבוצות אלה מה שעשיתם בסעיף א' לקבוצות A ו-B.

פתרון: א. A על פי הגדרתה היא קבוצת כל המספרים הממשיים x המקיימים את אי השוויון $|x^2-\frac{1}{2}|\le\frac{1}{2}$ השקול ל- $0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\le x^2\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ וזה מצדו שקול ל- $-1\le x\le+1$, זאת אומרת $A=[-1,+1]$ הקטע הסגור של המספרים הממשיים בין -1 ל-$+1$. לעומת זאת, B היא קבוצת כל הנקודות על הישר הממשי (המספרים הממשיים) שמרחקן מהנקודה 4 הוא 1, ולכן $B=\{3,5\}$.

ב. $C=(A\oplus3)\cup(A\oplus5)=([-1,1]\oplus3)\cup([-1,1]\oplus5)=[2,4]\cup[4,6]=[2,6]$

$D=(A\otimes3)\cup(A\otimes5)=([-1,1]\otimes3)\cup([-1,1]\otimes5)=[-3,3]\cup[-5,5]=[-5,5]$

5. הוכיחו (אפשר באינדוקציה) שלכל n טבעי, קיים פולינום $p_n(t)=a_0^n+a_1^nt+a_2^nt^2+\ldots+a_n^nt^n$ ממעלה n (ה-a_k^n קבועים ממשיים) כך ש- $\cos(nx)=p_n(\cos x)$ כלומר שהפונקציה $\cos(nx)$ היא פולינום ממעלה n במשתנה $t=\cos(x)$. כתבו במפורש את הפולינומים $p_2(t),p_3(t)$.

לעזרתכם: $\cos(x\pm y)=\cos x\cdot\cos y\mp\sin x\cdot\sin y$

פתרון: אפשר לנסות להוכיח את הטענה באמצעות משפט דה-מואבר שעל פיו $\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$, אך גישה זו עשויה להוביל למבוי סתום, אלא אם כן נעזרים בטיעון אינדוקטיבי מקביל לגבי האופי הפולינומי של $\sin(nx)$. בחרנו להציג כאן הוכחה אינדוקטיבית מלכתחילה ללא שימוש במשפט דה-מואבר. לתועלת צעד האינדוקציה בהוכחה נפיק תחילה מסקנה מהזהות הטריגונומטרית המופיעה לעזרתכם בשולי השאלה: כשנחבר את שתי זהויות העזר הנתונות, מכפלת הסינוסים תתקזז ונקבל

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

השקול ל:

$$\cos(x+y) = 2\cos x \cdot \cos y - \cos(x-y) \qquad (*)$$

הוכחת הטענה באינדוקציה:

עבור $n=1$: $\cos(1\cdot x) = \cos x = p_1(\cos x)$ כלומר $p_1(t)=t$ פולינום הזהות שהוא ממעלה ראשונה עם $(a_0^1 = 0,\ a_1^1 = 1)$. נניח עתה שהטענה נכונה לכל מספר טבעי $n \ge m$ ונוכיח אותה עבור $m = n+1$:

$$\cos(n+1)x = \cos(nx+x) = 2\cos(nx)\cdot\cos x - \cos(nx-x) = 2\cos(nx)\cdot\cos x - \cos(n-1)x =$$
$$= 2p_n(\cos x)\cdot p_1(\cos x) - p_{n-1}(\cos x) = p_{n+1}(\cos x)$$

ברצף זה של שוויונות, השוויון השני נובע מנוסחת העזר $(*)$ והרביעי מהנחת האינדוקציה. קבלנו אם כן $p_{n+1}(t) = 2p_n(t)\cdot t - p_{n-1}(t)$ ומאחר שלפי הנחת האינדוקציה p_n הוא פולינום ממעלה n, הרי p_{n+1} אף הוא פולינום (כי אוסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים סגור לגבי חיבור וכפל) והוא ממעלה $n+1$ (כי מכפלה של פולינום ממעלה n ופולינום ממעלה ראשונה (במקרה זה פולינום הזהות) היא פולינום ממעלה $n+1$).

לפי נוסחת הרקורסיה שמצאנו:

$$p_2(t) = 2p_1(t)\cdot t - p_0(t) = 2t\cdot t - 1 = 2t^2 - 1$$
$$p_3(t) = 2p_2(t)\cdot t - p_1(t) = 2(2t^2-1)\cdot t - t = 4t^3 - 3t$$

הערה: $p_0(t) \equiv 1$ (פולינום ממעלה 0) כי $\cos(0\cdot x) = \cos 0 = 1$.

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

6 (סהרוני היפוקרטס). נתון ריבוע החסום במעגל. על כל אחת מצלעות הריבוע (מחוצה לו) בונים חצי מעגל שקוטרו צלע הריבוע ומרכזו אמצע אותה צלע (ראו תרשים). כך נוצרים ארבעה סהרונים (ירחים) המוגבלים בין חצאי המעגלים שהוספנו לבין הקשתות המתאימות של המעגל החוסם את הריבוע. הוכיחו שסכום שטחי ארבעת הסהרונים שווה לשטח הריבוע.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות אפשר להניח שצלע הריבוע היא בעלת אורך 1 (ריבוע יחידה), זאת מאחר שאם אורכה אחר, כל המבנה יהפוך למבנה דומה (במובן דמיון גיאומטרי של שינוי הגודל תוך שמירה על הצורה) וכל השטחים המתאימים יוכפלו בריבוע האורך של צלע הריבוע, כך שהיחס ביניהם יישמר.

אלכסון הריבוע הוא קוטר המעגל החוסם אותו ובריבוע יחידה אורך האלכסון (קוטר המעגל) הוא $\sqrt{2}$ (לפי משפט פיתגורס). סכום שטחי 4 קשתות המעגל החוסם הנשענות על צלעות הריבוע שווה ל-

(שטח העיגול החוסם) פחות (1 = שטח הריבוע): $\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-1=\frac{\pi}{2}-1$

לעומת זאת, סכום שטחי 4 חצאי המעגלים הנשענים על צלעות הריבוע: $4\cdot\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2})^2=\frac{\pi}{2}$

סכום שטחי ארבעת הסהרונים הוא ההפרש בין שני הגדלים האלה: $\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-1)=1$

וזה שווה לשטח הריבוע, כפי שנדרשנו להוכיח.

הערה: לפנינו דוגמה מאלפת של מצולע בעל שטח רציונאלי השווה בשטחו לזה של צורה שהשפה שלה מורכבת מקווים עקומים (במקרה זה - קשתות של מעגלים). הדוגמה הזאת הומצאה ביון הקדומה על ידי היפוקרטס (מאה 5 לפנה"ס, לא זה שלזכותו נזקפת שבועת הרופאים) במסגרת נסיונותיו **לרבע את העיגול** כלומר, לבנות באמצעות סרגל ומחוגה ריבוע השווה בשטחו לשטח עיגול נתון. במשך מאות שנים ניסו מתמטיקאים, ללא הצלחה, למצוא בניה מתאימה, עד שב-1882 הראה המתמטיקאי הגרמני Ferdinand von Lindeman שזו משימה בלתי אפשרית בהוכיחו ש- π הוא מספר שאינו אלגברי (שאין משוואה פולינומיאלית עם מקדמים שלמים, ותהיה מעלתה אשר תהיה, ש- π הוא אחד מפתרונותיה), בעוד שקטעים הניתנים לבניה (מקטע יחידה) באמצעות סרגל ומחוגה הם בהכרח בעלי אורך שהוא מספר אלגברי. יתר על כן, רק מיעוטם של המספרים האלגבריים ניתנים לבניה. תרגיל: הוכיחו שאם a לא ניתן לבניה, אז כך גם $\sqrt{a}$ ולכן $\sqrt{\pi}$.

Pursuing the Unknown

בעקבות הלא נודע

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב