

איך עושים אנדוקציה ולמה זה עובד?

מהי אנדוקציה?

אנדוקציה הינה שיטת הוכחה שמאפשרת להוכיח טענות על קבוצה בת מניה של איברים (כמו למשל על סדרה). בשיטה זו מוכיחים את הטענה על האיבר הראשון, מניחים שהדבר נכון לאיבר ה- n ומוכיחים לאיבר ה- $n+1$. בדרך כלל נשתמש באנדוקציה להוכיח טענה על המספרים הטבעיים.

למה זה עובד?

נניח שאנחנו מוכיחים משהו עבור המספרים הטבעיים (זה מה שבדרך כלל עושים), ונניח שאני רוצה להבין למה הטענה נכונה עבור $n = 7$. אז עבור $n = 1$ הטענה נכונה משום שזה האיבר הראשון ועליו מוכיחים מפורשות שהטענה נכונה (מה שנכנה בהמשך "בסיס האנדוקציה"). עתה אם זה נכון לאיבר הראשון, מהאנדוקציה זה נכון גם לאיבר השני. עתה אנו יודעים את הטענה עבור האיבר השני, ונוכל להוכיח אותה עבור האיבר השלישי, וכן הלאה וכן הלאה...

איך עושים אנדוקציה?

לאנדוקציה יש 3 שלבים.

1. בסיס האנדוקציה - כאן מוכיחים את הטענה עבור האיבר הראשון. ברוב המקרים נוכיח את הטענה עבור $n = 1$.

2. הנחת האנדוקציה - מניחים את הטענה עבור כל $k < n$ (בדרך כלל יעניין אותנו רק שזה נכון עבור $n - 1$, ואולם קיימות אנדוקציות שבהן צריך איברים שקודמים לו).

3. צעד האנדוקציה - מוכיחים שהטענה נכונה עבור האיבר ה- n , בהנתן שהטענה נכונה לאיברים הקודמים.

דוגמא: הוכח באנדוקציה שלכל $n \geq 2$ ולכל $x > -1$ מתקיים $(x+1)^n \geq 1 + n \cdot x$ (זהו אי שוויון ברנולי).

הוכחה באנדוקציה לפי השלבים:

1. בסיס האנדוקציה - נוכיח עבור $n = 1$

$$(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1 \cdot x$$

על כן עבור $n = 1$ הטענה מתקיימת.

2. הנחת האנדוקציה - נניח שלכל $k < n$ מתקיים $(1+x)^k \geq 1+k \cdot x$.

3. צעד האנדוקציה - נראה שמתקיים $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$.

$$(1+x)^n = (1+x) \cdot (1+x)^{n-1} \geq (1+x)(1+(n-1)x) = 1+nx+(n-1)x^2 \geq 1+nx$$

כאשר האי שוויון הראשון הוא לפי הנחת האנדוקציה (לה"א), שכן הנחנו שהטענה נכונה

$$\text{עבור } n-1, \text{ משמע } (1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x.$$