School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות
מבחן סיווג במתמטיקה (20.09.2019)

1. הוכיחו שלכל $1 \le n$, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \le 2-\frac{1}{n}$ ומצאו את ערכי n שעבורם יש שוויון.

פתרון: ההוכחה תתבצע בשיטת האינדוקציה. לנוחיות, נסמן את הסכום המופיע באגף שמאל ב- S_n.

תחילה נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$: $S_1 = 1 \le 2-\frac{1}{1} = 2-1=1$, כלומר עבור $n=1$ שני האגפים שווים והטענה נכונה. הנחת האינדוקציה: $S_n \le 2-1/n$ עבור מספר טבעי $1<n$ כלשהו.

יש להוכיח: $S_{n+1} \le 2-\frac{1}{n+1}$. הוכחה: $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \le (2-\frac{1}{n}) + \frac{1}{(n+1)^2}$

כאשר האי-שוויון נובע מהנחת האינדוקציה. מספיק, אם כן, להוכיח כי $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \le 2-\frac{1}{n+1}$

השקול ל- $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n}$ והשקול מצדו ל-

$$\frac{n}{n+1}(1+\frac{1}{n+1}) = (1-\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{(n+1)^2} < 1$$

וזה מוכיח את הטענה ל-$n+1$ ולפיכך לכל מספר טבעי n.

ראינו לעיל ששוויון מתקיים עבור $n=1$ וכאשר עוברים מ- S_n ל- S_{n+1} מוסיפים $1/(n+1)^2$ באגף שמאל ואילו באגף ימין מתווסף הגודל $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ שהוא גדול בעליל מ- $\frac{1}{(n+1)^2}$ ולפיכך השוויון מתקיים אך ורק עבור $n=1$.

חומר למחשבה: הוכחנו שכמה גדול שלא יהיה n, הסכום S_n לעולם יהיה קטן במקצת מ-2, כאשר ה"מקצת" הולך וקטן ומתקרב ל-0 ככל ש-n הולך וגדל. האם נוכל להסיק מכך ש- S_∞, כלומר סכום כל אינסוף האיברים של הטור הנתון שווה 2 ? התשובה היא לא ולא ! כי ייתכן שהחסם 2 הוא נדיב/בזבזני מדי וחישוב יותר מדויק (ויש להניח – יותר מסובך) עשוי להוביל לחסם קטן יותר. אכן, המתמטיקאי הדגול ליאונרד אוילר (1707-1783), ללא ספק מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים, והפורה שבהם, חישב ומצא כי $S_\infty = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}... = \frac{\pi^2}{6} < \frac{11}{6} < 2$. מה שכן ניתן להסיק ממה שהוכחנו הוא של- S_∞ יש ערך מספרי סופי שהוא לכל היותר 2.

●●● קריית האוניברסיטה, ת"ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

2. א) מצאו את כל המספרים הממשיים המקיימים את המשוואה $\log_4 x + \log_8 x + \log_{64} x = 3$

ב) מהי קבוצת כל המספרים הממשיים המקיימים את אי-השוויון $\log_2 x - \log_{1/2} x > 3$

פתרון: א) שלושת בסיסי הלוגריתמים במשוואה הנתונה הם חזקות של 2:

$4 = 2^2,\ 8 = 2^3,\ 64 = 2^6$ ולפיכך, כשנציג את הלוגריתמים על הבסיס המשותף 2, נקבל

$$\log_4 x + \log_8 x + \log_{64} x = \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x + \frac{1}{6}\log_2 x = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\log_2 x = \log_2 x = 3$$

ומהשוויון האחרון מקבלים (על פי הגדרת הלוגריתם) את $x = 2^3 = 8$ כמספר הממשי היחיד המקיים את המשוואה.

ב) מאחר ש- $1/2 = 2^{-1}$ הלוגריתם של מספר חיובי ביחס לבסיס ½ שווה בגודלו והפוך בסימנו ללוגריתם של אותו מספר ביחס לבסיס 2, ולפיכך אי-השוויון הנתון שקול לאי-השוויון $2\log_2 x = \log_2 x^2 > 3$ ומאחר שפונקציית הלוגריתם היא פונקציה עולה (כשהבסיס גדול מ-1), אי-השוויון האחרון שקול ל- $x^2 > 2^3 \iff x > 2^{3/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ כך שקבוצת המספרים המבוקשת היא הקרן הפתוחה (הקצוות לא שייכים אליה) $(2\sqrt{2}, \infty)$ על הישר הממשי.

3. נתונים ארבעת המספרים המרוכבים: $z = v + w \quad w = -1 + 2i \quad v = 2 + i \quad u = 0$

הוכיחו שארבע הנקודות במישור המרוכב הנקבעות על ידי מספרים אלה מהוות קדקודים של ריבוע וחישבו את שטחו.

פתרון: תחילה סימון: זוג סדור $A = (Z, W)$ של מספרים מרוכבים יסמן להלן את הקטע המחבר את הנקודות שהם מייצגים במישור המרוכב, אורכו של קטע זה יסומן ב-$|A|$. צלעות המרובע שקדקודיו מיוצגים על ידי המספרים הנתונים הן: $a = (u, v),\ b = (u, w),\ c = (v, z),\ d = (w, z)$ ואורכיהן

$$|a| = |v-u| = |(2+i)-0| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5},\ \ |b| = |w-u| = |(-1+2i)-0| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$

חישוב דומה מראה שגם $|c| = \sqrt{5} = |d|$. המרובע בעל הקדקודים הנתונים הוא אם כן מרובע בעל צלעות שוות-אורך, כלומר המרובע הוא מעוין. כדי שמעוין יהיה ריבוע, מספיק שאחת מזוויותיו (ואז – כולן) תהיה זווית ישרה (90 מעלות). נראה עתה שהזווית בין הצלעות a ו- b הנפגשות בקדקוד 0 היא אכן ישרה. זווית זו היא ההפרש בין הזווית $\boldsymbol{\beta}$ שבה נוטה הצלע b כלפי הכיוון החיובי של הציר האופקי לבין זווית הנטייה $\boldsymbol{\alpha}$ כלפי אותו כיוון של הצלע a. הסינוס והקו-סינוס של זוויות אלה מופיעות בהצגות הפולאריות של v ו-w:

$$w = -1+2i = \sqrt{5}(\frac{-1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}(\cos\boldsymbol{\beta} + i\sin\boldsymbol{\beta}) \qquad v = 2+i = \sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}(\cos\boldsymbol{\alpha} + i\sin\boldsymbol{\alpha})$$

ומכאן $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ולפי הנוסחה שהוצגה לעזרתכם

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{4+1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$ ולפיכך $\beta - \alpha = 90^\circ$

שטח הריבוע הוא כמובן $5 = \sqrt{5}^2 = |d|^2 = |c|^2 = |b|^2 = |a|^2$

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

4. לגבי כל אחד משני האי-שוויונות הבאים מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים המקיים אותו

א) $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4| \le x-5$

ב) $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4| \le x+5$

פתרון: א) אגף שמאל הוא אי-שלילי לכל x ממשי (סכום של ערכים מוחלטים) ואילו אגף ימין הוא שלילי כאשר $x<5$ כך שאין מספרים קטנים מ-5 בקבוצה המבוקשת. לעומת זאת עבור $5\le x$ (ואפילו עבור $0\le x$)

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=4x+10$$

אבל $4x+10\le x-5$ (אם ו) רק אם $x\le -5$, כך שאין בקבוצה המבוקשת גם מספרים גדולים מ- או שווים ל-5. מסקנה: קבוצת המספרים הממשיים המקיימת את אי-השוויון היא הקבוצה הריקה.

ב) עבור x אי-שלילי, אגף שמאל = 4x+10 > x+5 = אגף ימין, כך שאין מספרים אי שליליים המקיימים את אי-השוויון הנתון. יתר על כן, בתחום המספרים השליליים רק מספרים גדולים מ(5-) באים בחשבון כי אחרת אגף ימין אי-חיובי ואגף שמאל חיובי. נותר אם כן לחפש פתרונות בקטע הפתוח (ללא הקצוות) (-5,0). נסמן ב- $L(x)$ את אגף שמאל וב- $R(x)$ את אגף ימין.

טענה 1: בקטע (-5,0) הפונקציה $L(x)$ היא סימטרית סביב $x=-2.5$ (מרכז הקטע), כלומר $L(-y) = L(-5+y)$ לכל $y\in(0,2.5)$.

הוכחה:

$$L(-y)=|1-y|+|2-y|+|3-y|+|4-y|=|y-1|+|y-2|+|y-3|+|y-4|=L(-5+y)$$

שימו לב שכדי להבליט לעין את השוויון, המחוברים של $L(-5+y)$ הוכנסו בסדר הפוך.

טענה 2: $L(x)=4$ לכל $x\in[-3,-2]$ (קטע סגור הכולל את הקצוות שלו, אף שאין זה בעל חשיבות לטיעון הכולל).

הוכחה: כל נקודה x בקטע ניתנת להיכתב כ- $x=-3+y$ עם $y\in[0,1]$ כלשהו, לכן

$$\begin{aligned}L(x)&=L(-3+y)=|1-3+y|+|2-3+y|+|3-3+y|+|4-3+y|\\&=(2-y)+(1-y)+(y)+(1+y)=4\end{aligned}$$

טענה 3: הפונקציה $L(x)$ יורדת בקטע (-5,-3) מ-10 ל-4, נשארת קבועה בערך 4 (טענה 2) בין 3- ל 2- ועולה שוב ל-10 בקטע (-2, 0). הוכחה: בדקו בעצמכם.

לסיכום, הערך המינימלי של L בתחום הרלוונטי כולו הוא 4, לעומת זאת אגף ימין קטן מ-4 בתחום הרלוונטי, חוץ מאשר בקטע (-1, 0), אבל בקטע זה אגף שמאל הוא לפחות 6 (בדקו!).
מסקנה: גם בסעיף זה הקבוצה המבוקשת היא ריקה.

4/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

5. תהי P קבוצת כל התת קבוצות (לרבות הקבוצה הריקה והקבוצה כולה) של הקבוצה $\{1,2,3,...,10\}$ ותהי $f: P \to N=\{0,1,2,...\}$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(A)=|A|$ (כלומר, ערך הפונקציה ב"נקודה" A הוא מספר האיברים בתת-הקבוצה A).

א) קבעו: האם הפונקציה f היא **חד-חד-ערכית**? האם היא **על**? האם היא **הפיכה**?

ב) הוכיחו: $f(A\cup B) \le f(A)+f(B)$ לכל $A,B\in P$ וקבעו באילו תנאים מתקיים שוויון.

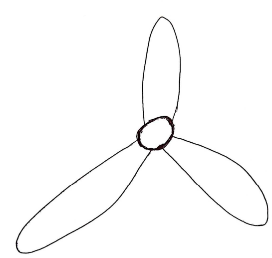
פתרון: א) הפונקציה אינה חד-חד-ערכית כי יש תת-קבוצות שונות ("נקודות" שונות בתחום ההגדרה של f) בעלות אותו מספר איברים (שעבורם f היא בעלת אותו ערך). הפונקציה אינה **על** כי מאחר שהיא מוגדרת על קבוצה סופית מספר ערכיה סופי ואילו קבוצת הטווח שלה אינסופית. היא אף אינה הפיכה כי כפי שראינו היא לא חד-חד-ערכית.

ב) $A\cup B=A\cup(B\cap A^c)$ כשהאיחוד באגף ימין הוא איחוד של שתי קבוצות זרות כי הקבוצה השנייה בו מוכלת במשלים של הראשונה, וההכלה היא **ממש** אם-ורק-אם B זרה ל-A. לפיכך:

$$f(A\cup B)=|A\cup B|=|A\cup(B\cap A^c)|=|A|+|B\cap A^c|\leqq|A|+|B| = f(A)+f(B)$$

השוויון השלישי בשורה הקודמת נובע מעקרון החיבור לגבי קבוצות זרות ואי-השוויון הסופי הוא בגלל שהחיתוך של B עם קבוצה אחרת (כאן המשלים של A) הוא תת-קבוצה של B. כאמור לעיל, שוויון מתקיים אם-ורק- אם B מוכלת במשלים של A, כלומר אם-ורק-אם A ו-B קבוצות זרות.

6. נתון פרח המורכב מליבה עגולה וסביבה שלושה עלים מופרדים זה מזה (אף עלה אינו נוגע בעלה אחר, אך כל עלה נוגע בליבה) כבציור המצורף. צביעה קבילה של הפרח היא צביעה אשר בה אזורים עם גבול משותף נצבעות בצבעים שונים.



א) בכמה צביעות קבילות שונות תוכלו לצבוע את הפרח כשלרשותכם שלושה צבעים?

ב) כיצד תשתנה תשובתכם לחלק א' אם שתי צביעות השונות זו מזו אך ורק בסיבוב הפרח ב-120 מעלות תחשבנה כאותה צביעה?

ג) כיצד תשתנינה תשובותיכם לחלק א' אם בשונה מהנ"ל שניים מעלי הפרח נוגעים זה בזה והעלה השלישי מופרד מהם (וכל היתר לא משתנה)?

5/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א) את עיגול הליבה ניתן לצבוע בכל אחד משלושת הצבעים ולכל צבע שנבחר נוכל לבחור אחד משני הצבעים הנותרים לצביעת כל אחד משלושת העלים (מאחר שלעלים אין גבול משותף, עלים שונים יכולים לקבל אותו צבע). מכאן שמספר הצביעות הקבילות הכולל הוא $3\text{x}2^3 = 24$

ב) שלושה סיבובים של 120 מעלות באותה מגמה שקולים לסיבוב של 360 מעלות המחזיר את המצב לקדמותו. שימו לב שסיבוב של 120 מעלות במגמה המנוגדת שקול לשני סיבובים כאלה במגמה המקורית. לפיכך, אם לכל צביעה קבילה מזהים את שלוש הצביעות המתקבלות ממנה בשלושה סיבובים של 120 מעלות (באותה מגמה), מספר הצביעות השונות הכולל קטן פי שלושה, יחסית למספרן בחלק א', כלומר מספר הצביעות הקבילות השונות במקרה זה הוא $24/3 = 8$.

ג) במקרה זה שניים מהעלים דורשים צבעים שונים זה מזה ושונים מצבע הליבה. לכן, לשני עלים אלה ולליבה אפשר לבחור את הצביעה ב- $3! = 6$ אופנים ולכל בחירה כזאת יש שני צבעים (השונים מהצבע של הליבה) בהן ניתן לצבוע באופן קביל את העלה השלישי (הנפרד). כך שמספר הצביעות הקבילות הכולל במקרה זה הוא 12 (2 כפול 6).

ב ה צ ל ח ה