School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות
מבחן סיווג במתמטיקה (06.08.2019)

1. במצולע משוכלל בעל צלע באורך 1, אורך האלכסון הקצר ביותר הוא $\sqrt{3}$. בן כמה צלעות המצולע ?

לעזרתכם: $\sin 90^\circ = 1 \quad \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \quad \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 \quad \sin 30^\circ = 1/2 \quad \sin 0^\circ = 0$

כמו כן, להזכירכם: מצולע משוכלל הוא כידוע מצולע שווה-צלעות שגם כל זוויותיו חופפות. אלכסון של מצולע הוא קטע המחבר שני קדקודים שאינם קצוות של אותה צלע. אלכסוני מצולע, אף אם הוא משוכלל, אינם שווי אורך (אלא אם כן הוא משוכלל ויש לו שני אלכסונים בלבד, כלומר רק כאשר הוא ריבוע).

פתרון: האלכסון הקצר ביותר הוא כמובן אלכסון המחבר קצוות של צלעות סמוכות. אלכסון כזה והצלעות הנשענות עליו יוצרות משולש שווה-שוקיים בעל שוקיים באורך 1 (הצלעות) ובסיס באורך $\sqrt{3}$ (האלכסון) (ציירו תרשים מתאים). הגובה לבסיס חוצה את זווית הראש, שנסמנה ב- α, וגם את הבסיס. במשולש ישר הזווית שנוצר מתקבל $\sin(\alpha/2)=\sqrt{3}/2$ ולפי טבלת פונקציית הסינוס שלעזרתכם $\alpha/2=60^\circ \quad \Leftarrow \quad \alpha=120^\circ = 2\pi/3$, כלומר זוויות המצולע המשוכלל הן בנות 120° כ"א. עתה, נמצא את הקשר בין גודל זווית המצולע המשוכלל לבין מספר צלעותיו n: כשמחברים את מרכז המצולע (מרכז המעגל החוסם אותו) עם קדקודיו, נוצרים n משולשים שווי שוקיים עם זווית ראש, נגיד β, במרכז. כמובן $n\beta=2\pi$ (מעגל שלם) אבל $\beta=180^\circ-\alpha=\pi-\alpha$ (וודאו שאמנם כן) ולפיכך

$$n\beta=n(\pi-\alpha)=2\pi \quad \Rightarrow \quad n=\frac{2\pi}{\pi-\alpha}=\frac{2\pi}{\pi-2\pi/3}=6$$

המצולע הנדון הוא, אם כן, משושה משוכלל.

2. זהו וכתבו במפורש (לא בהצגה פולארית) את כל המספרים המרוכבים z שעבורם $z^3=|z|$.

פתרון: המספר $z=0$ מקיים כמובן את המשוואה הנתונה. כל ערכי z המבוקשים האחרים הם בעלי ערך מוחלט 1 כי $|z|^3=|z^3|=||z||=|z| \quad \Leftarrow \quad |z|^2=1 \quad \Leftarrow \quad |z|=1$.

מלבד $z=0$ מבוקשים אם כן כל ערכי z שחזקתם השלישית היא 1. הערך $z=1$ הוא כמובן אחד הערכים האלה. עקב המשמעות הגיאומטרית של פעולת הכפל במספרים מרוכבים, הערכים המבוקשים האחרים הם כל אלה המיצגים נקודות על פני מעגל היחידה סביב הראשית, שכאשר מסובבים אותן בזווית מתאימה (זו המופיעה בהצגה הפולארית של z) במגמה חיובית (נגד מגמת השעון) שלוש פעמים, חוזרים לנקודת המוצא 1 (הנקודה (1,0) במישור). לא קשה להיווכח ששתי הזוויות הרלוונטיות (בין 0 ל-360 מעלות) הן בנות 120° ו- 240° (כי אלה הזוויות היחידות בין 0 ל-360 מעלות שכאשר כופלים אותן ב-3 מקבלים כפולה שלימה של 360, כלומר מעגל שלם). ועתה,

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2 \qquad \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$
$$\cos 240^\circ = -1/2 \qquad \sin 240^\circ = -\sqrt{3}/2$$

ולפיכך:

$$z_0 = 1 \quad z_1 = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad z_{trivial} = 0$$

הם ארבעת ערכי z המבוקשים. שלושת הראשונים הם כמובן שורשי היחידה מסדר 3.

3. הוכיחו כי לכל מספר טבעי $1 \le n$ ולכל מספר ממשי x,

$$\sin(x)\cos(x)\cos(2x)...\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}$$

פתרון: נוכיח את הטענה באינדוקציה. בדיקה עבור $n = 1$:

$$\sin(x)\cos(x)\cos(2x) = \frac{\sin(2x)}{2}\cos(2x) = \frac{\sin(4x)}{4} = \frac{\sin(2^{1+1}x)}{2^{1+1}}$$

כאשר השוויון הראשון והשני נובעים מהזהות $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

הנחת האינדוקציה: הטענה נכונה עבור מספר טבעי $1 < n$ כלשהו.

הוכחה עבור $n+1$:

$$[\sin(x)\cos(x)\cos(2x)...\cos(2^n x)]\cos(2^{n+1}x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}}\cos(2^{n+1}x) = \frac{\sin(2\times 2^{n+1}x)}{2\times 2^{n+1}} =$$
$$= \frac{\sin(2^{(n+1)+1}x)}{2^{(n+1)+1}}$$

כאן השוויון הראשון נובע מהנחת האינדוקציה ואילו השני - שוב מנוסחת הסינוס לזווית כפולה. מאחר שהטענה נמצאה נכונה עבור $n = 1$ ומהנחת תקפותה עבור מספר טבעי כלשהו, הוכחנו שהיא תקפה גם עבור העוקב שלו, הרי היא תקפה לכל מספר טבעי. לבסוף: ההוכחה האינדוקטיבית נשענה אך ורק על זהות טריגונומטרית התקפה לכל מספר ממשי, כך שגם הטענה שלפנינו תקפה לכל מספר ממשי.

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

4. כמה תת-קבוצות יש לקבוצה $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$? רשמו את כולן.

פתרון: הקבוצה שלפנינו היא בת 3 איברים (שאף הם עצמם קבוצות ושניים מהם אפילו קבוצות של קבוצות) ולכן מספר התת-קבוצות שלה הוא $2^3 = 8$, כולל הקבוצה הריקה והקבוצה כולה:

תת-קבוצה אחת בת 0 איברים: $\varnothing$ הקבוצה הריקה
(שהיא ע"פ הגדרה/הסכם (מסיבות לוגיות טובות) חלקית לכל קבוצה שבעולם)

3 תת-קבוצות בנות איבר 1: $\{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

3 תת-קבוצות בנות 2 איברים: $\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\ \{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

תת-קבוצה אחת בת 3 איברים: $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

בכך נרשמו כל שמונה התת-קבוצות. למי שמתחשק, מוזמן/נת להשתעשע ברישום קבוצת כל שמונה התת-קבוצות שלעיל. לאחר הרישום מומלץ לוודא שמספר הסוגרים הכולל הוא זוגי (לכל סוגר שמאלי-פותח יש בן זוג ימני-סוגר, ולהפך), כך תצמצמו את אפשרויות הטעות.

5. זהו את קבוצת כל המספרים הממשיים $x\in(-\pi,\pi)$ המקיימים $\log_2\cos(x) > -\frac{1}{2}$.

פתרון: מאחר ש- $\log_2 y$ היא פונקציה עולה (ממש) של $0<y$ (כי בסיס הלוגריתם 2 גדול מ-1) ו- 2^y היא הפונקציה ההפוכה שלה (שאף היא כמובן עולה), הרי האי-שוויון הנתון שקול לאי-השוויון $2^{\log_2\cos(x)} = \cos(x) > 2^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

מבוקשים אם כן כל ערכי x בין $-\pi$ ל- π שעבורם $\cos(x)>\sqrt{2}/2$. פונקציית הקוסינוס עולה ברציפות מ--1 (בנקודה $-\pi$) ל-$+1$ (בנקודה 0) ויורדת משם חזרה ל--1 (בנקודה π). מטעמי רציפות, בדרכה למעלה וגם למטה היא חייבת לקבל כל ערך בין 1- לבין 1+, בפרט את הערך $\sqrt{2}/2$ המתקבל בנקודות $-\pi/4=-45^\circ$ (בדרך למעלה) ו- $\pi/4=45^\circ$ (בדרך למטה), כי $\cos(\pm45^\circ)=\sqrt{2}/2$ כפי שנובע בנקל, למשל, ממשפט פיתגורס. עד שהקוסינוס מגיע לערך זה בדרכו למעלה הוא קטן ממנו, ומשם ואילך – עד הגיעו שוב לערך זה בדרכו למטה – הוא גדול ממנו, ובהמשך שוב יורד מתחתיו. סיכומו של דבר:

$$\left\{x\in(-\pi,\pi): 2^{\log_2\cos(x)} > -\frac{1}{2}\right\} = \left\{x\in(-\pi,\pi): \cos(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = (-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$$

6. תהי F קבוצת כל הפונקציות מהקבוצה $A=\{1,2,3\}$ לקבוצה $B=\{1,2,...,10\}$.
א. כמה איברים יש בקבוצה F ?
ב. כמה מהם הם פונקציות חד-חד ערכיות?
ג. כמה מהם הם פונקציות מונוטוניות (עולות או יורדות) **ממש**?
ד. כמה מהם הם פונקציות עולות **חלש** (כלומר, עולות אך לאו דווקא ממש).

פתרון: א. $|F|=10^3 = 1,000$ כי בכל אחת משלוש הנקודות ב- A יש 10 אפשרויות לקבוע את ערך הפונקציה בנקודה, באופן בלתי תלוי בערכיה בנקודות האחרות.

ב. פונקציה ב- F היא חד-חד ערכית אם ורק אם היא מקבלת שלושה ערכים שונים. כמו כן, כל בחירה של 3 ערכים שונים ניתן לסדר ב- $3!=6$ אופנים שונים ולקבל 6 פונקציות שונות, כך שבסך הכל יש ב- F $10\times9\times8=720$ פונקציות חד-חד-ערכיות.

ג. לכל פונקציה עולה ממש מתאימה באופן חד-חד ערכי פונקציה יורדת ממש על ידי היפוך סדר הערכים, כך שמספר הפונקציות המונוטוניות (ממש) כפול ממספר הפונקציות העולות ממש. נחשב אם כן את מספר הפונקציות העולות ממש: פונקציה עולה ממש נקבעת על ידי תת-קבוצה בת 3 ערכים ב- B וסידורם בסדר עולה, וכל שתי תת-קבוצות שונות קובעות שתי פונקציות שונות, כך שמספר הפונקציות העולות ממש הוא $\binom{10}{3}=120$ ומספר הפונקציות המבוקש הוא כאמור כפול מזה, כלומר 240. שימו לב שרק שליש מהפונקציות החד-חד ערכיות הן מונוטוניות ובעצם אפשר להראות זאת באופן ישיר משיקולים קומבינטורים ולהסיק את מספר הפונקציות המונוטוניות ממספרן של החד-חד ערכיות.

ד. אלה הפונקציות העולות שאינן חד-חד ערכיות, כלומר הן מקבלות אותו ערך יותר מפעם אחת. יש 10 כאלה שהן קבועות: $|\{f\in F : f(1)=f(2)=f(3)\}| = 10$ ועוד 90 אחרות המתחלקות לשתי קבוצות שוות בגודלן:

$$|\{f\in F : f(1)=f(2)<f(3)\}| = 9+8+...+1 = 45 = |\{f\in F : f(1)<f(2)=f(3)\}|$$

הנמקה ברמז: אם בוחרים $f(1)=f(2)=1$, יש 9 ערכים לבחור את $f(3)$ כך ש- f תהיה עולה חלש ולא קבועה, וכו'...
ובסך הכל: יש ב- F $10+45+45=100$ פונקציות עולות חלש שאינן עולות ממש, ובתוספת 120 העולות ממש (מסעיף ג') מתקבלות 220 פונקציות שהן עולות לאו דווקא ממש.