שאלה: נתונה קובייה. מצאו את כמות המישורים במרחב שעוברים דרך לפחות 3 קודקודים של הקובייה.

פתרון: כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד קובעות מישור. בקובייה יש 8 קדקודים שאף שלושה מתוכם אינם על ישר אחד, ולכן יש $56 = \frac{8*7*6}{1*2*3} = \binom{8}{3}$ שלשות של קדקודים שקובעות מישור.
ישנן שלשות שקובעות אותו מישור: אם ארבעה (או יותר) מהקדקודים נמצאים על אותו מישור, כל שלושה מתוכם יקבעו אותו מישור. אין מישורים שעוברים דרך חמישה קדקודים או יותר. נותר לספור את המישורים שעוברים דרך ארבעה קדקודים. ישנם לפחות 12 מישורים כאלה: 6 הפאות של הקובייה + 6 מישורים המחברים שתי צלעות מקבילות נגדיות. כיצד נדע שאין יותר מ-12 מישורים כאלה? אפשרות אחת היא לעבור על שאר הרביעיות ולהראות שהן אינן נמצאות על מישור אחד. אפשרות אחרת היא הבאה: כל אחד מ-12 המישורים שעוברים דרך ארבעה קדקודים נספר ארבע פעמים. הדבר אומר שנותרנו עם $56 - 12 * 4 = 8$ שלשות קדקודים. ניתן לעבור עליהן ולוודא שהמישורים הנפרשים על ידן מכילים בדיוק שלושה קדקודים.

קיבלנו כי מספר המישורים שעוברים דרך לפחות 3 קדקודים הוא $56 - 12 * 3 = 20$.

פתרון חלקי:

תלמיד צירף רשימה של 20 המישורים ולא הסביר את תשובתו.

פתרון חלקי:

כדי להבין כמה מישורים עוברים דרך ארבעה קדקודים, כתב אחד התלמידים "מכל קדקוד יוצאים 3 מקצועות לשלושה קדקודים, כל שלושה קדקודים כאלה יוצרים מישור ו-3 נקודות אלה הן לא חלק מרביעייה של קדקודים הנמצאים על אותו המישור. ישנן 8 שלישיות כאלה. שאר השלישיות הן חלק מרביעייה של קדקודים הנמצאים על אותו מישור, לכן יש 20 מישורים." התלמיד אינו מסביר מדוע אין שלישיות נוספות של קדקודים שמגדירות מישור בצורה יחידה.

פתרון חלקי:

תלמיד מנה את כל המישורים: 6 פאות הקובייה, 12 מישורים המחברים בין מקצועות מקבילים, מישורים המחברים אלכסון של אחת הפאות עם קדקוד שאינו על הפאה. לאחר מכן הוא הפחית את מספר המישורים שנספרו מספר פעמים וקיבל כתשובה את המספר 20. לא ניתן הסבר מדוע אלה הם כל המישורים. כדי להשלים את הפתרון ניתן היה לספור את שלשות הנקודות ולהראות שבספירה שלו עבר התלמיד על כל השלשות.

שאלה: הוכח כי $\mathbf{\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}}$ **לכל** x**.**

פתרון ראשון: מכיוון שאגף ימין קטן מ-(-1) כאשר $x \geq 2$ או $x \leq -2$, ו-$\cos(x) \geq -1$, האי-שוויון מתקיים כאשר $x \geq 2$ או $x \leq -2$.

נוכיח כעת את האי-שוויון עבור $-2 \leq x \leq 2$. על ידי העברת אגפים נקבל כי עלינו להוכיח את האי-שוויון $\cos(x) - 1 \geq -\frac{x^2}{2}$.

נשים לב כי $\cos(x) - 1 = \cos(x) - \cos(0) = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

לכן יש להוכיח כי $-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq -\frac{x^2}{2}$, השקול ל- $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq \left(\frac{x}{2}\right)^2$. אי-שוויון זה מתקיים עבור $-2 \leq x \leq 2$ מכיוון שהפונקציות בשני האגפים זוגיות וכן $0 \leq \sin(x) \leq x$ לכל $0 \leq x \leq \pi$ (הוכחה של אי-שוויון זה נראה בפתרון שני).

פתרון שני: הפונקציות בשני האגפים הן פונקציות זוגיות ולכן מספיק לבדוק את האי-שוויון עבור $x \geq 0$.

עבור $x = 0$ שני האגפים שווים. נראה שהנגזרת של אגף שמאל גדולה מהנגזרת של אגף ימין.
הנגזרת של אגף שמאל היא $-\sin(x)$ והנגזרת של אגף ימין היא $-x$. צריך להראות כי $-\sin(x) \geq -x$, או, לחילופין, $\sin(x) \leq x$ לכל $x \geq 0$. כדי להוכיח את האי-שוויון הזה אפשר נשתמש פעם נוספת בשיטת הנגזרת: עבור $x = 0$ מתקיים $\sin(0) = 0$, והנגזרת של אגף שמאל, שהיא $\cos(x)$ קטנה או שווה מהנגזרת של אגף ימין, שהיא 1.

הערה: לאי-שוויון $\sin(x) \leq x$ ישנה גם הוכחה גיאומטרית.

פתרון ריק:

תלמיד צייר את שני הגרפים וכתב "מכיוון ש- $\frac{\pi}{2} < \sqrt{2}$ אז חוץ מבנקודה $(0,1)$ שהפונקציות משיקות, $\cos(x)$ מעל $1 - \frac{x^2}{2}$ מה שמוכיח את האי שוויון." התשובה לא התקבלה, שכן לא הוכח מדוע הגרף האחד נמצא תמיד מעל הגרף השני.

פתרון ריק:

תלמיד צייר את הגרפים של שתי הפונקציות על אותה מערכת צירים וראה שהגרף של $\cos(x)$ גבוה מהגרף של $1 - \frac{x^2}{2}$. מכאן הוא הסיק את התשובה. התשובה לא התקבלה, שכן לא הוכח מדוע הגרף האחד נמצא תמיד מעל הגרף השני.

פתרון שגוי:

תלמיד בדק שהאי-שוויון מתקיים בנקודות $x = 0$, $x = \pi$ ו-$x = 2\pi$. לאחר מכן הוא וידא שהנגזרת של אגף שמאל גדולה מהנגזרת של אגף ימין בשלוש הנקודות האלה. מכאן הוא הסיק שהאי-שוויון מתקיים לכל x. המסקנה האחרונה שגויה.