School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון

מבחן סיווג במתמטיקה (24.05.2019)

1. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים x החיוביים ושונים מ-1 שעבורם מתקיים אי-השוויון

$$\log_4 x^2 + \log_x 16 < 5$$

פתרון: המספר 1 אינו בסיס לגיטימי של פונקציית הלוגריתם, לפיכך הערך $x=1$ הוא מחוץ למשחק.

נעביר תחילה את הלוגריתם של 16 מבסיס x לבסיס 4 (שימו לב ש- $\log_4 16 = 2$):

$\log_x 16 = \dfrac{\log_4 16}{\log_4 x} = \dfrac{2}{\log_4 x}$. נציב באי-השוויון הנתון ונקבל

$$\log_4 x^2 + \frac{2}{\log_4 x} = 2\log_4 x + \frac{2}{\log_4 x} < 5$$

כאשר $0<x<1$, $\log_4 x$ הוא שלילי, כך שאגף שמאל של אי-השוויון הוא שלילי והוא קטן מאגף ימין החיובי.
במילים אחרות, כל קטע היחידה הפתוח מוכל בקבוצת ערכי x המקיימים את אי השוויון הנתון.

לעומת זאת, כאשר $1<x$ המכנה $0<\log_4 x$ ואפשר להכפיל בו את אי-השוויון מבלי לשנות את כיוונו, כך שמתקבל אי השוויון הריבועי הבא במשתנה $y \equiv \log_4 x$:

$$2y^2 + 2 < 5y \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2 - 5y + 2 < 0$$

השקול ל-

$$2y^2 - 5y = 2[(y-\frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16}] < -2 \quad \Leftrightarrow \quad (y-\frac{5}{4})^2 < \frac{9}{16} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4} < y-\frac{5}{4} < \frac{3}{4}$$

כלומר $\dfrac{1}{2} < y \equiv \log_4 x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 4^{\frac{1}{2}} < x < 4^2 = 16$

לסיכום: איחוד הקטעים הפתוחים הזרים $(0,1)\cup(2,16)$ הוא קבוצת ערכי ה- x הדרושה. כאשר x בקטע החסר $(1,2)$ כמו גם בקרן $(16,+\infty)$ מתהפך אי-השוויון הנתון, ועבור $x=2$ ו- $x=16$ מתקבל בו שוויון.

2. הוכיחו: לכל מספר טבעי $1 \le n$, תקפים אי-השוויונים

$$1 < \frac{1}{n^4}(2+4+6+\ldots+2n)^2 \le 4$$

וקבעו עבור אלו ערכי n מתקיים השוויון באי-השוויון הימני.

פתרון:

$$\frac{1}{n^4}(2+4+\ldots+2n)^2 = \frac{1}{n^4}[2(1+2+\ldots+n)]^2 = \frac{1}{n^4}4[\frac{n(n+1)}{2}]^2 = [\frac{n(n+1)}{n^2}]^2 = (1+\frac{1}{n})^2$$

הביטוי האחרון הוא ריבוע של מספר גדול מ-1 (לכל $1 \le n$) וקטן מ-2 אלא אם כן $n = 1$ שאז הוא שווה ל-2, כך ששני אי-השוויונים מתקיימים לכל מספר טבעי ושוויון באי-השוויון הימני מתקיים אך ורק כאשר $n = 1$.

3. נתון $\cos x = 1/3$. א. חשבו את $\cos(2x)$ ואת $\cos(3x)$. ב. הוכיחו שלכל מספר טבעי $1 \le n$, $\cos(nx) = a_n / 3^n$ עם a_n מספר שלם (חיובי או שלילי) שאינו מתחלק ב-3.

תזכורת לעזרתכם: $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

פתרון: תחילה נשים לב שהחיבור של שתי הזהויות שניתנו כתזכורת מוביל לזהות

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos(x)\cos(y) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x+y)=2\cos(x)\cos(y)-\cos(x-y)$$

א. ניתן לחשב קוסינוסים אלה באופן ישיר, תוך שימוש בזהות לקוסינוס של סכום, אך כדי להכין את הקרקע לצעד האינדוקטיבי בסעיף ב', ננצל את הזהות שקיבלנו זה עתה בצורתה בצד ימין של השורה:

$$\cos(2x)=\cos(x+x) = 2\cos(x)\cos(x) - \cos(x-x)=2\cos^2(x)-1=2(\frac{1}{3})^2-1=-\frac{7}{9}=\frac{-7}{3^2}$$

$$\cos(3x)=\cos(2x+x)=2\cos(2x)\cos(x)-\cos(2x-x)=2\cdot\frac{-7}{3^2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{16}{27}=\frac{-16}{3^3}$$

ב. הטענה תוכח באינדוקציה. על פי הנתון, הטענה נכונה עבור $n=1$ עם $a_1 = 1$ (וכפי שמצאנו בסעיף א', $a_2 = -7,\ a_3 = -16$). הנחת האינדוקציה: $\cos(kx)=\frac{a_k}{3^k}$ לכל $n \ge k$ ו- a_k אינו מתחלק ב-3.

הוכחה עבור $k = n+1$:

$$\cos[(n+1)x]=\cos(nx+x)=2\cos(nx)\cos(x)-\cos(nx-x)=2\cos(nx)\cos(x)-\cos[(n-1)x]=$$
$$=2\frac{a_n}{3^n}\cdot\frac{1}{3}-\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{2a_n-9a_{n-1}}{3^{n+1}}$$

הביטוי האחרון מאמת את הטענה עבור $k = n+1$ עם $a_{n+1} = 2a_n - 9a_{n-1}$ ונותר רק להשתכנע שאם a_{n-1}, a_n אינם מתחלקים ב-3 (זה כלול בהנחת האינדוקציה), אז גם a_{n+1} אינו מתחלק ב-3. ואכן, אם a_{n+1} היה מתחלק ב-3, אז גם $2a_n - 9a_{n-1}$ השווה לו היה מתחלק ב-3, אך מאחר ש- a_n ולכן גם $2a_n$ אינם מתחלקים ב-3 ואילו $9a_{n-1}$ מתחלק ב-3 (בהיותו כפולה של 9), הרי ההפרש שלהם לא מתחלק ב-3.

4. לוחית זיהוי של מכונית מורכבת משתי אותיות לטיניות שונות זו מזו (מ-26 האותיות $A, B, ..., Z$) וחמש ספרות לאו דווקא שונות זו מזו (מ-10 הספרות 0,1,2,...,9).
א. לכמה מכוניות ניתן להכין לוחית זיהוי בשיטה זו ?
ב. פי כמה ישתנה (יגדל או יקטן) מספר המכוניות בחלק א' אם יידרש בנוסף שהספרה הראשונה והאחרונה על פני הלוחית תהיינה שוות ואילו יתר שלוש הספרות תהיינה שונות זו מזו ושונות גם מהספרה הראשונה ?

פתרון: א. יש 26 אפשרויות שונות לבחור את האות הראשונה שתופיע בלוחית הזיהוי ולכל אחת מאלה יש 25 (כי האות השנייה צריכה להיות שונה מזו שנבחרה ראשונה) אפשרויות לאות השנייה, בסה"כ יש $26 \times 25 = 650$

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

אפשרויות לקבוע את שתי האותיות בלוחית. לכל אחת מ-650 אפשרויות אלה קיימות כמובן 10^5 אפשרויות לצרף לשתי האותיות את חמש הספרות. לכן, מספר המכוניות שניתן להכין להן לוחיות זיהוי בשיטה זו הוא $650\cdot10^5$ שהם ששים וחמישה מיליון.

ב. הדרישה שהספרות הקיצוניות תהיינה שוות מקטין את מספר אפשרויות הבחירה שלהן מ-$10^2 = 100$ ל-10 כלומר פי 10. הדרישה שיתר שלוש הספרות תהיינה שונות מהספרה ראשונה (והאחרונה השווה לה) מותירה רק 9 אפשרויות לבחירת הספרה השנייה ולאחר שזו נבחרה רק 8 לבחירת השלישית ולבסוף רק 7 אפשרויות לבחירת הרביעית, וזה מקטין את מספר האפשרויות לבחירת שלוש הספרות האמצעיות מ-10^3 ל-$9\cdot8\cdot7=504$ כלומר כמעט פי שניים ובמדויק פי $\frac{125}{63}=1000:504$. ובסה"כ שני האילוצים על חמש הספרות יקטינו את מספר המכוניות להן ניתן להכין לוחיות זיהוי פי $10\cdot\frac{125}{63}\approx20$, כלומר מספר המכוניות האפשריות יקטן כמעט פי 20, לכשלושה ורבע מיליון.

5. סדרת המספרים המרוכבים $\{z_n\}$ מוגדרת על ידי $z_0=0$ ולכל $0\le n$, $z_{n+1}=\frac{i}{2}z_n+5$

א. הסתכלו על אברי הסדרה כעל נקודות במישור המרוכב ותארו את הפעולות הגיאומטריות (סיבוב, מתיחה או כיווץ והזזה) המתבצעות במעבר מ-z_n ל-z_{n+1}. אם לדעתכם יש סיבוב במעבר, ציינו סביב איזו נקודה מתבצע הסיבוב, באיזו זווית ובאיזו מגמה (עם או נגד כיוון השעון) ולגבי מתיחה או כיווץ ציינו את שיעורם. כנ"ל לגבי הזזה.

ב. חשבו את z_n כפונקציה של n.

פתרון: א. z_{n+1} מתקבל מ-z_n על ידי הכפלה במספר $\frac{i}{2}$ והוספת המספר 5 לתוצאה של ההכפלה. כידוע, הכפלה במספר מרוכב קבוע w מסובבת כל נקודה במישור סביב הראשית במגמה חיובית (נגד כיוון השעון) בזווית המופיעה בהצגה הפולארית של w ומותחת (אם $1<|w|$) או מכווצת (אם $|w|<1$) את הווקטור המשתרע מהראשית לנקודה (שאורכו הוא כמובן הערך המוחלט של המספר המיוצג על ידי הנקודה) בשיעור $|w|$. במעבר מאיבר לעוקבו בסדרה הנתונה

$$w=\frac{i}{2}=\frac{1}{2}(0+i\cdot1)=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2})\qquad |w|=\frac{1}{2}$$

ולפיכך כדי לעבור מ-z_n ל-z_{n+1} מסובבים את הווקטור z_n בזווית של 90° ($\frac{\pi}{2}$ רדיאנים) סביב הראשית נגד כיוון השעון ומכווצים אותו למחצית מאורכו (אין זה משנה באיזה סדר מבצעים את פעולות הסיבוב והכיווץ). הוספת המספר 5, הדרושה להשלמת המעבר, מזיזה את הנקודה שהתקבלה מהסיבוב והכיווץ בחמש יחידות ימינה בכיוון האופקי (כי 5 הוא מספר ממשי והוספתו למספר מרוכב אינה משפיעה על הרכיב הדמיוני של המספר).

ב. z_{n+1} הוא מהצורה az_n+b עם $a=i/2$ ו- $b=5$. נחשב איברים ראשונים אחדים בסדרה:

$$z_0=0,\quad z_1=a\cdot0+b=b,\quad z_2=az_1+b=ab+b,\quad z_3=az_2+b=a(ab+b)+b=b(a^2+a+1)$$
$$z_4=az_3+b=a(ba^2+ba+b)+b=b(a^3+a^2+a+1),\ \dots$$

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מעיון באיברים ראשונים אלה מתברר המבנה של האיבר הכללי של הסדרה: כל איבר הוא כפולה של b בסכום (מהסוף להתחלה) של סדרה גיאומטרית בעלת מנה a ואיבר התחלתי 1, כשמספר האיברים שיש לסכם הוא 1 פחות ממספר האיבר בסדרה אותו מחשבים. לפיכך:

$$z_n = b(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1) = b\frac{1-a^n}{1-a} = 5\frac{1-(\frac{i}{2})^n}{1-\frac{i}{2}} = \frac{10}{2^n}\frac{2^n-i^n}{2-i}$$

6. פרמוטציה (תמורה) של קבוצה היא כידוע פונקציה חד-חד-ערכית של הקבוצה **על** עצמה. נתבונן בפרמוטציות של הקבוצה $\{1,2,3\}$. בהינתן שתי פרמוטציות כאלה, π ו- σ, נסמן ב- $\sigma\circ\pi$ את ההרכבה שלהן, כלומר $\sigma\circ\pi$ היא הפונקציה (שאף היא פרמוטציה) המוגדרת על ידי $(\sigma\circ\pi)(x)=\sigma(\pi(x))$ עבור $x=1,2,3$. האם $\sigma\circ\pi=\pi\circ\sigma$ לכל זוג פרמוטציות? אם תשובתכם חיובית, הוכיחו אותה ואם לאו – מצאו והציגו דוגמא נגדית לטענה.

פתרון: אין סיבה לצפות שהרכבה של שתי פונקציות אינה תלויה בסדר שבו היא מתבצעת, ואכן טענת החילופיות אינה תקפה לגבי פרמוטציות, כלומר יש זוגות של פרמוטציות של הקבוצה {1,2,3} שאינן מתחלפות בהרכבה.

לדוגמא:

$$\sigma = (\sigma(1),\ \sigma(2),\ \sigma(3)) = (2,\ 3,\ 1)$$
$$\pi = (\pi(1),\ \pi(2),\ \pi(3)) = (3,\ 2,\ 1)$$

עבור פרמוטציות אלה מקבלים:

$$(\sigma\circ\pi)(1) = \sigma(\pi(1)) = \sigma(3) = 1 \qquad (\sigma\circ\pi)(2) = \sigma(2) = 3 \qquad (\sigma\circ\pi)(3) = \sigma(1) = 2$$
$$(\pi\circ\sigma)(1) = \pi(\sigma(1)) = \pi(2) = 2 \qquad (\pi\circ\sigma)(2) = \pi(3) = 1 \qquad (\pi\circ\sigma)(3) = \pi(1) = 3$$

חישוב מפורש זה של שתי ההרכבות מראה בעליל ש- $\pi\circ\sigma\neq\sigma\circ\pi$. יתר על כן, במקרה זה ערכי ההרכבות שונים זה מזה בכל נקודה בתחום ההגדרה. כמובן, להצגת דוגמה נגדית כפי שנדרשה מספיק היה להצביע על אי-שוויון בנקודה אחת כי שוויון של פונקציות מוגדר כשוויון ערכיהן בכל נקודה. למען השלימות היצגנו את ערכי שתי הפונקציות (ההרכבות) בשלימותן.