School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות

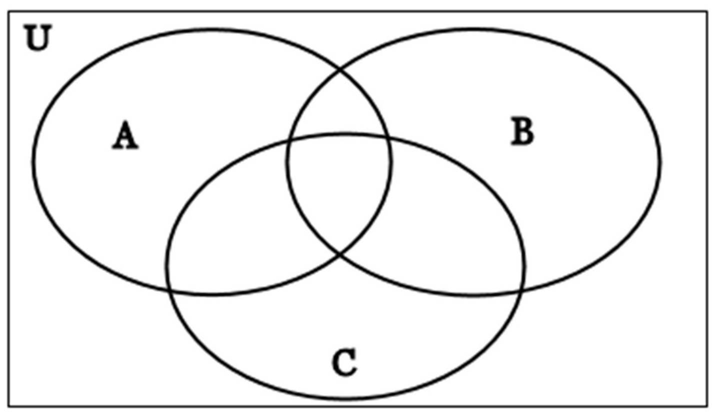
מבחן סיווג במתמטיקה (30.10.20.2020)

1. תהיינה A,B,C קבוצות, שלשתן תת-קבוצות של קבוצה U. נגדיר את הקבוצות

$$D=((A\cap B)\setminus C)\cup(C\setminus(A\cup B)$$
$$E=((A\cup B)^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)$$

א. (8 נק') שרטטו 2 דיאגרמות-וון לקבוצות הנתונות וצבעו (אפשר בדיו או בעיפרון) באחת מהן את התחום המייצג את הקבוצה D ובאחרת את התחום של E.

ב. (9 נק') הוכיחו פורמאלית, מבלי להיעזר בדיאגרמות, כי $D=E$.



פתרון: א. בהעדר אופציות עריכה בתרשים, נסתפק בתשובה לסעיף ב'.

ב. על פי הגדרה, ההפרש $S\setminus T$ בין שתי קבוצות פירושו קבוצת כל הנקודות השייכות למחוסר S ואינן שייכות למחסר T, ז"א אלה (ואלה בלבד) השייכות גם ל-S וגם למשלים של T: $S\setminus T=S\cap T^c$. כמו כן, $S\cap T=T\cap S$ & $S\cup T=T\cup S$ ו- $(S\cap T)\cap M=S\cap(T\cap M)=S\cap T\cap M$ ומשום כך

$$D=((A\cap B)\setminus C)\cup(C\setminus(A\cup B))=(A\cap B\cap C^c)\cup(C\cap(A\cup B)^c)$$
$$=((A\cup B)^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)=E$$

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

2. חשבו את x כפונקציה של n מהמשוואה $\log_{64} x+\log_{64} x^2+...+\log_{64} x^n = 1/12$ ופשטו (צמצמו) את הביטוי שקבלתם ככל הניתן.

פתרון:

$$\log_{64} x+\log_{64} x^2 + ... +\log_{64} x^n = (1+2+...+n)\log_{64} x =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\log_{64} x = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \log_{64} x = \frac{1}{6n(n+1)} \Leftrightarrow$$
$$x = 64^{\frac{1}{6n(n+1)}} = (64^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{n(n+1)}} = 2^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

3. ידועה העובדה שלכל מספר טבעי n, סכום n הקוביות הראשונות שווה לריבוע הסכום, כלומר

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1+2+...+n)^2$$

בעזרת עובדה זו, מצאו ביטוי סגור (כלומר, ללא סכום עם 3 נקודות, או הסימן Σ) כפונקציה של n לסכום

$$0\cdot1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 + ... + (n-1)n(n+1)$$

פתרון:

$$0\cdot1\cdot2+...+(n-1)n(n+1) = \sum_{i=1}^{n}(i-1)i(i+1) = \sum_{i=1}^{n}i(i^2-1) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(i^3-i) = \sum_{i=1}^{n}i^3 - \sum_{i=1}^{n}i =$$
$$= (1+2+...+n)^2 - (1+2+...n) =$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) =$$
$$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n-2) = \frac{1}{4}(n^4+2n^3-n^2-2n)$$

4. נתונות שלוש הקבוצות הבאות של מספרים מרוכבים z:

$$A=\{z:|z|=1\} \quad B=\{z:|\mathrm{Re}(z)|=|\mathrm{Im}(z)|\} \quad C=\{z: z-\bar{z}\in R\}$$

א. (9 נק') שרטטו במישור המרוכב (בשלוש דיאגרמות נפרדות) את הקבוצות הנתונות.

ב. (8 נק') מצאו את הקבוצות $A\cap B,\ B\cap C,\ C\cap A,\ A\cap B\cap C$ והציגו כל אחת מהן במפורש תוך פירוט כל האיברים שבה.

3/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א. נספק זיהוי גיאומטרי של הקבוצות ואת השרטוט נשאיר לקוראים.

הקבוצה A היא קבוצת כל הנקודות שמרחקן מהראשית 1, ז"א מעגל היחידה סביב הראשית.

$$B=\{z=x+iy:|x|=|y|\}=\{z=x+iy:x=\pm y\}=\{(x,y):x=y\}\cup\{(x,y):x=-y\}$$

וזהו כמובן איחוד שני הישרים החוצים את הזויות בין צירי המערכת. שניהם עוברים דרך הראשית, האחד נוטה בזווית 45° כלפי הכיוון החיובי של הציר האופקי והשני בזווית -45° , כך שהם ניצבים זה לזה.

$$C=\{z=x+iy:z-\bar{z}=(x+iy)-(x-iy)=2iy\in R\}=\{z=x+iy:y=0\}$$

וזהו כמובן הציר האופקי (ציר ה-X).

ב. $A\cap B$ היא קבוצת 4 הנקודות על מעגל היחידה המחלקות את רבעי המעגל הנוצרים על ידי הצירים לקשתות שוות בנות 45 מעלות כ"א, ובפירוט:

$$A\cap B=\{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\}$$

C חותכת את B בראשית בלבד ולכן $B\cap C=\{(0,0)\}$.

C חותכת את A בקצות הקוטר האופקי של מעגל היחידה, לכן $C\cap A=\{(-1,0),(1,0)\}$

הישרים המהווים את B חותכים את ציר ה-X (הקבוצה C) בראשית ולא כל שכן אין להם נקודה משותפת עם $C\cap A$ וקל וחומר אין נקודות משותפות לשלוש הקבוצות הנתונות ועל כן $A\cap B\cap C=\varnothing$.

5. א. (9 נק') מצאו את כל המספרים הממשיים x בקטע $(-2\pi,2\pi)$ שעבורם $\tan^2 x=3$.

תזכורת: $\cos(\pi/3)=1/2$

ב. (8 נק') הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית $\cos(\alpha)=\dfrac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}$

4/-

פתרון: א.

$$\tan^2 x=(\frac{\sin x}{\cos x})^2=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=3 \quad \Leftrightarrow$$
$$1-\cos^2 x=3\cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x=\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x=\pm\frac{1}{2}$$

בקטע הנדון $(-2\pi,2\pi)$

$\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}$ $\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}$ כך שקבוצת ערכי ה-x המבוקשת היא

$\{-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\}$ ובמינוח של זוויות בין 0 ל-360 מעלות: $\{60^\circ,120^\circ,240^\circ,300^\circ\}$.

הערה: במעבר לעיל בין השורה הראשונה לשנייה כפלנו את שני אגפי השוויון ב- $\cos^2 x$. בררו לעצמכם מדוע צעד זה הוא לגיטימי. אגב, ניתן היה לפתור סעיף זה באמצעות הזהות בסעיף ב' (עשו זאת).

ב.

$$\cos\alpha=\cos(2\frac{\alpha}{2})=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

6. מיתר של מעגל (היקף/שפה של עיגול) הוא קטע המחבר שתי נקודות על המעגל. נתונות n נקודות על מעגל ומותחים את כל המיתרים בין זו לזו.

א. (5 נק') מהו מספר המיתרים שנוצרו, כפונקציה של n ?

ב. (12 נק') נניח שהנקודות נבחרו באופן שאף שלושה מהמיתרים אינם נחתכים באותה נקודה (לידיעה - אפשר להוכיח שלכל n בחירה כזאת אפשרית).

מהו מספר כל נקודות החיתוך בין המיתרים שנוצרו (כפונקציה של n)?

רמז: נתחו את המקרה $n=4$ וזהו את הרלוונטיות שלו ל-n כללי.

5/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א. כל מיתר נקבע על ידי שתיים מהנקודות הנתונות, וזוגות שונים של נקודות קובעים מיתרים שונים, ולפיכך מספר המיתרים שווה למספר התת-קבוצות בנות שני איברים של קבוצת הנקודות הנתונה. מספר זה הוא כידוע $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

ב. במקרה $n=4$ יש 4 נקודות חיתוך על המעגל בין מיתרים המהווים צלעות סמוכות של מרובע חסום במעגל שקדקודיו הם הנקודות הנתונות, ועוד נקודת חיתוך פנימית (בתוך העיגול) בין שני המיתרים שהם אלכסוני המרובע, כך שבמקרה זה יש $4+1=5$ נקודות חיתוך. כאשר $n<4$ אין נקודות חיתוך פנימיות וקל לראות בעין, על כן – לספור, את נקודות החיתוך על המעגל (עשו זאת). לעומת זאת, עבור $n>4$ כללי, כל נקודת חיתוך פנימית נובעת מחיתוך אלכסוני מרובע (החסום במעגל) שקדקודיו הם הקצוות של שני המיתרים הנחתכים בנקודה פנימית זו (ואין אחרים הנחתכים באותה נקודה, כי כך נבחרו הנקודות), בנוסף לכך – מאחר שהנקודות נבחרו כך שלא יותר משני מיתרים נחתכים באותה נקודה – רביעיות שונות של קבוצת הנקודות הנתונה יוצרות מרובעים (חסומים במעגל) שאלכסוניהם נפגשים בנקודות שונות. לפיכך, מספר נקודות החיתוך הפנימיות הוא כמספר התת-קבוצות בנות 4 איברים של קבוצת הנקודות הנתונה, וכידוע מספר זה הוא $\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. בנוסף לכך יש n נקודות חיתוך היקפיות בין זוגות המיתרים המהווים צלעות סמוכות של המצולע החסום שהנקודות הנתונות קובעות ומהוות את קדקודיו. היוצא מזה שסך כל נקודות החיתוך בין המיתרים הוא $n+\binom{n}{4}$.

אתגר למחשבה: אפשר להוכיח שבמקרה הנדון בסעיף ב' של השאלה, העיגול מתחלק על ידי המיתרים הנחתכים ל- $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$ תת תחומים, אך זו בעיה מדרגת קושי גבוהה יותר. חשבו עליה.