School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות
מבחן סיווג במתמטיקה (19.06.2020)

1. סדרת פיבונאצ'י $\{F_n\}_{n\geq 1}$ מוגדרת על ידי: $F_1 = F_2 = 1$ ולכל $2<n$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

פתרון: נוכיח את הטענה בשיטת האינדוקציה.

בדיקה עבור $n=1$: $1=F_1 = \sum_{i=1}^{1} F_i = F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = F_1 + F_2 - 1 = 1+1-1=1$

הנחת האינדוקציה: הטענה תקפה עבור n טבעי קבוע כלשהו.

הוכחת הטענה עבור $n+1$ על סמך הנחת האינדוקציה:

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1} = (F_{n+2}-1) + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} - 1 = F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1$$

השוויון השני משמאל נובע מהנחת האינדוקציה והרביעי מהרקורסיה המגדירה את סדרת פיבונאצ'י.

2. **א.** (5 נקודות) **"**ממוצע פשוט", או בפשטות - ממוצע, של מספר סופי של מספרים הוא סכומם חלקי מספרם. חשבו את הממוצע של המספרים $0,1,2,\ldots,n$ כפונקציה של n.

ב. (12 נקודות) "ממוצע משוקלל", עם משקולות $\{w_i\}$ $(\sum w_i = 1,\ 0 \leq w_i)$, של קבוצת מספרים סופית $\{a_i\}$ הוא הסכום $\sum w_i a_i$. הוכיחו שהממוצע המשוקלל של קבוצת המספרים $\{0,1,\ldots,n\}$ עם המשקולות $w_i = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ שווה לממוצע הפשוט של קבוצת מספרים זו.

פתרון: א. המספרים הנתונים מהווים סדרה חשבונית בת $n+1$ איברים, עם איבר ראשון 0 ואיבר אחרון n, לכן הממוצע שלהם הוא: $\frac{1}{n+1}(0+1+\ldots+n) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(0+n)(n+1)}{2} = \frac{n}{2}$

ב. עלינו להוכיח: $\frac{n}{2} = \frac{0+1+\ldots+n}{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 2^{-n}\binom{n}{i} i$ השקול ל- $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i = n2^{n-1}$ $(*)$ ובצורתה זו נוכיח את הטענה באינדוקציה (לכל מספר טבעי $0 \leq n$).

בדיקה עבור $n=0$: רואים בעליל שמתקבל 0 בשני האגפים של $(*)$.

הנחת האינדוקציה: הטענה $(*)$ תקפה עבור n טבעי קבוע כלשהו.

הוכחת הטענה עבור $n+1$ על סמך הנחת האינדוקציה: תחילה ניזכר במשולש פסקל למקדמים הבינומיים המתבטא בקשר הבא ביניהם $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, ועתה להוכחה עצמה:

●●● קריית האוניברסיטה, ת״ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}i = \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}i \underset{(i=k+1)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(k+1) = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right](k+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k+1}$$

נבדוק את שלושת המחוברים האחרונים. לפי הנחת האינדוקציה $n2^{n-1}$ = המחובר הראשון.
המחובר השני הוא סכום כל המקדמים הבינומיים מסדר n שערכו כידוע $(1+1)^n = 2^n$.
כשחוזרים במחובר השלישי למשתנה הסיכום $i = k+1$, ושוב לפי הנחת האינדוקציה, רואים שהמחובר הזה שווה ל- $n2^{n-1}$. נסכם עתה את ערכי שלושת המחוברים:

$n2^{n-1} + 2^n + n2^{n-1} = 2n2^{n-1} + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n = (n+1)2^{(n+1)-1}$. **מ.ש.ל.**

הערה: הממוצע המשוקלל בחלק ב' של השאלה, הוא המספר הממוצע של פעמים שבהן מתקבל "עץ" כאשר מטילים מטבע הוגן (תקין) n פעמים. מה שהוכחנו הוא שממוצע זה שווה לממוצע המתקבל כאשר בוחרים באקראי מספר שלם בין 0 ל-n. בעלי חוש הסתברותי יכלו לשער מלכתחילה שבממוצע מספרי ההופעות של כל אחד מצדי המטבע שווים זה לזה (כשמדובר במטבע הוגן, על פי הגדרה, אין עדיפות לאף אחד מצדדיו) וכל אחד הוא בממוצע מחצית מספר ההטלות .

3. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים x שעבורם $\log_2\left|\dfrac{2^{2x}-2^{x+1}-8}{2^x+4^{x-1/2}}\right| < 1$.

פתרון: הפונקציה $t \to 2^t$ (t ממשי) היא פונקציה עולה ממש ולכן חד-חד-ערכית ומשום כך x מקיים את אי השוויון הנתון אם-ורק-אם הוא מקיים $2 = 2^1 > \dfrac{|2^{2x}-2^{x+1}-8|}{|2^x+4^{x-1/2}|} \equiv \left|\dfrac{2^{2x}-2^{x+1}-8}{2^x+4^{x-1/2}}\right|$

נסמן את 2^x ב- y ונשים לב ש- $0 < y$ לכל x ממשי ולפיכך המכנה של אגף שמאל של האי-שוויון הוא חיובי אף ללא הערך המוחלט ואפשר להכפיל בו את שני אגפי האי-שוויון מבלי להפוך את כיוונו.
ובכן, במונחים של y לפנינו אי-השוויון $|y^2-2y-8| < 2(y+y^2/2) = y^2+2y \quad (*)$

ננתח את אגף שמאל:

$$y^2-2y-8 = (y+2)(y-4) \quad \begin{cases} >0, & y\in(-\infty,-2)\cup(4,\infty) \\ <0, & y\in(-2,4) \end{cases}$$

נזכור שה- y שלנו חיובי, כך שנוכל להוציא מהדיון את ערכיו השליליים ונקבל עבור $0 < y$

$$|y^2-2y-8| = \begin{cases} y^2-2y-8, & y>4 \\ 8+2y-y^2, & 0<y<4 \end{cases}$$

3/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

עכשיו נשווה את שני אגפי האי-שוויון $(*)$, לכל אחד מתחומי y בנפרד.

$y>4$: $y^2-2y-8<y^2+2y \iff y>-2$ כלומר, אי שוויון $(*)$ מתקיים עבור $4<y$.

$0<y<4$: $8+2y-y^2<y^2+2y \iff 8<2y^2 \iff 2<y$.

המסקנה הנובעת מניתוח זה היא שאי-שוויון $(*)$ מתקיים אם-ורק-אם $2<y$.

בתרגום חזרה למונחי x ($y=2^x$) מקבלים שקבוצת כל ה-x שעבורם מתקיים אי-השוויון הנתון היא הקרן הפתוחה $(1,\infty)$ למעט הערך $x=2$ שעבורו המונה הוא $\log_2 0$ שאינו מוגדר.

4. מצאו את קבוצת כל המספרים המרוכבים z שעבורם $4<z\cdot\bar{z}<16$ ותארו אותה גיאומטרית במישור המרוכב, לרבות תרשים מתאים. כנ"ל עבור הקבוצה $\{z:\ z+\bar{z}>0\}$ כמו גם עבור הקבוצה $\{z:\ (z-\bar{z})/2i>0\}$. תנו תיאור גיאומטרי מלא, כולל תרשים, לחיתוך של שלוש הקבוצות הנ"ל.

פתרון: $A\doteq\{z:4<z\cdot\bar{z}<16\}=\{z:4<|z|^2<16\}=\{z:2<|z|<4\}$

הערך המוחלט של מספר מרוכב מבטא את המרחק של הנקודה המייצגת אותו במישור המרוכב מהראשית. לפיכך הקבוצה A היא קבוצת כל הנקודות במישור שמרחקיהן מהראשית הוא בין 2 ל-4 וזו הטבעת (הפתוחה, ללא שני המעגלים) הכלואה בין המעגל ברדיוס 2 סביב הראשית לבין המעגל הקונצנטרי (בעל אותו מרכז) ברדיוס 4.

$$B\doteq\{z:z+\bar{z}>0\}=\{z:2\,\mathrm{Re}(z)>0\}=\{z:\mathrm{Re}(z)>0\}$$

זו קבוצת כל המספרים המרוכבים בעלי חלק ממשי חיובי, המיוצגת במישור על ידי חצי המישור (הפתוח, ללא השפה) שמימין (ממזרח) לציר האנכי.

$$C\doteq\{z:(z-\bar{z})/2i>0\}=\{z:\mathrm{Im}(z)>0\}$$

זו קבוצת כל המספרים המרוכבים בעלי חלק דמיוני חיובי, המיוצגת גיאומטרית על ידי חצי המישור (הפתוח) שמעל (מצפון) הציר האופקי.

$B\cap C=\{z:\mathrm{Re}(z)>0,\mathrm{Im}(z)>0\}$ הוא רבע המישור החיובי (הצפון מזרחי) המוגבל על ידי שתי הקרניים החיוביות של הצירים.

החיתוך של תחום מישורי זה עם התחום הטבעתי A הוא כמובן רבע הטבעת ששפתה הישרה (הקווית) מורכבת מהקטע (2,4) על הציר האופקי והקטע (2,4) על הציר האנכי.

5. צפרדע הנמצאת בנקודה (0,0) מתכננת טיול לנקודת היעד (10,30) במישור. חוקי התנועה במישור מאפשרים לצפרדע בצעד בודד לקפוץ למרחק של יחידה 1 מזרחה (לימין) או למרחק של 2 יחידות צפונה (כלפי מעלה).

4/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

א. (3 נקודות) כמה צעדים מכל סוג (ימינה, למעלה) על הצפרדע לבצע כדי להגיע ליעדה?

קו שבור המוביל מ-(0,0) ל-(10,30) שקטעיו הישרים הם צעדים חוקיים נקרא **מסלול.** מסלולים הם שונים אם הם אינם זהים, כלומר אינם מורכבים מאותם צעדים בדיוק ובאותו סדר.

ב. (5 נקודות) בכמה מסלולים שונים זה מזה יכולה הצפרדע לבצע את הטיול שלה?
ג. (5 נקודות) בכמה, מבלי לעבור בנקודה (6,8) ?
ד. (4 נקודות) בכמה, כאשר היא מתעקשת שהצעד האחרון יהיה ימינה?

פתרון: א. כדי להגיע ליעד (10,30) הצפרדע חייבת להתרחק בדיוק 10 יחידות מזרחה מנקודת המוצא שלה וזה דורש בדיוק (לא פחות ולא יותר) 10 צעדים ימינה מתישהו לאורך המסלול. היעד נמצא גם 30 יחידות צפונה מנקודת המוצא של הצפרדע וכדי להגיע לשם על הצפרדע לבצע בדיוק 15 צעדים כלפי מעלה (כזכור, כל צעד בכיוון זה הוא באורך של שתי יחידות מרחק). בסיכום, 10 צעדים ימינה ו-15 צעדים כלפי מעלה, בסדר כלשהו, יביאו את הצפרדע למחוז חפצה.
ב. כפי שמצאנו בסעיף א', המסלול של הצפרדע מורכב מ-$10+15=25$ צעדים ש-10 מהם ימינה ו-15 כלפי מעלה. כדי לבחור מסלול אפשרי הצפרדע צריכה לקבוע באיזה 10 מ-25 הצעדים היא תצעד ימינה (ב-15 האחרים – כלפי מעלה) ולכך יש לה $\binom{25}{10}=\binom{25}{15}=\frac{25!}{10!15!}$ אפשרויות וזהו מספר המסלולים השונים שלה.
ג. נחשב את מספר המסלולים העוברים בנקודה (6,8) ונפחית מספר זה ממספר המסלולים הכולל שמצאנו בסעיף ב'. משיקול כמו בסעיף ב' נובע שמספר המסלולים מהראשית ל-(6,8) הוא $\binom{6+4}{6}=\binom{10}{6}=\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!6!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{24}=10\cdot 3\cdot 7=210$. לכל מסלול כזה יש $\binom{15}{4}=\binom{15}{11}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{24}=1,365$ מסלולים המובילים מ-(6,8) ליעד הסופי (10,30) (חשבו מדוע).
כך שמספר המסלולים העוברים בנקודה (6,8) הוא $\binom{10}{6}\cdot\binom{15}{11}=1,365\cdot 210=286,650$
ומספרם של אלה שאינם עוברים בנקודה זו הוא $\binom{25}{15}-\binom{10}{6}\cdot\binom{15}{11}$.
ד. אם הצעד האחרון במסלול הוא ימינה, אז לפני צעד זה הצפרדע תהיה במרחק יחידה אחת מערבית (משמאל) ליעד (10,30) כלומר היא תימצא בנקודה (9,30) ומספר המסלולים מהראשית לנקודה זו הוא (נובע מהשיקול החוזר על עצמו בסעיפים ב' ו-ג' של השאלה) $\binom{9+15}{9}=\binom{24}{9}$ וזהו כמובן מספר המסלולים שהצעד האחרון שלהם הוא ימינה.

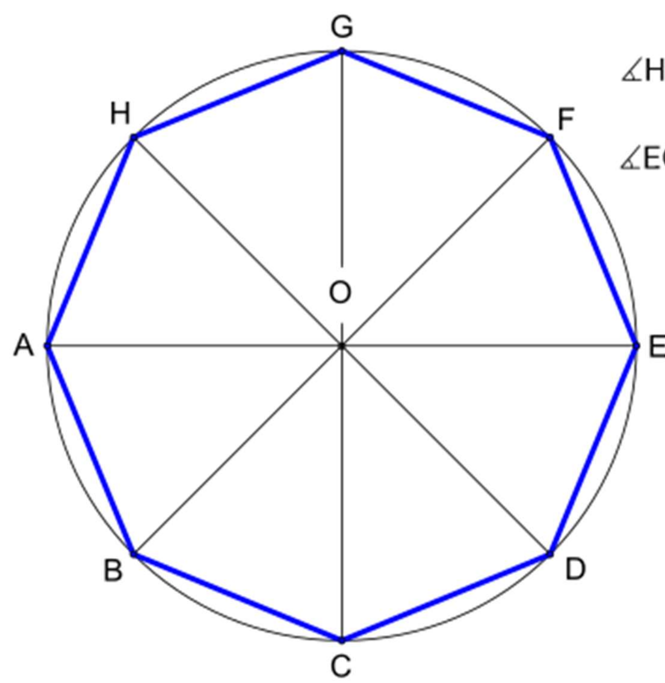
5/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

6. ABCDEFGH הוא מצולע משוכלל בן 8 צלעות (מתומן משוכלל).
א. (5 נקודות) הוכיחו שהמרובע ACEG הוא ריבוע.
ב. (12 נקודות) מהו היחס בין שטח המתומן הנתון לבין שטח הריבוע ACEG?

פתרון: מצולע שווה-צלעות ושווה-זוויות מוגדר כמצולע משוכלל. שוויון צלעות בלבד או שוויון זוויות בלבד אין בו כדי לזכות את המצולע בתואר 'משוכלל'; מעוין (שאינו ריבוע) הוא שווה-צלעות אך אינו מרובע משוכלל, מלבן (שאינו ריבוע) הוא שווה-זוויות אך אינו מרובע משוכלל.

דרך פשוטה לבנות מתומן משוכלל היא לחלק מעגל ל-8 קשתות שוות, בנות $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}=45^\circ$ רדיאנים כל אחת (אורך כל קשת הוא המכפלה של גודל זה ברדיוס המעגל). נקודות החלוקה של המעגל מהווים קדקודים של מתומן משוכלל שצלעותיו הם מיתרי המעגל המחברים נקודות חלוקה סמוכות. חשבון זוויות פשוט מראה שזוויות המתומן המשוכלל הן בנות 135 מעלות. כמו כן, נובע מהדיון הקצר הזה שלמתומן משוכלל (כמו לכל מצולע משוכלל) יש מרכז סימטריה ומעגל חוסם סביבו. לנוחיות המשך הדיון נחסום את המתומן הנתון במעגל ונשתמש בסימונים שבתרשים המצורף.



$$\measuredangle HOA = \frac{1}{2}\measuredangle GOA$$

$$\measuredangle EOF = \frac{1}{2}\measuredangle EOG$$

6/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

א. צלעות המרובע ACEG הם מיתרים הנשענים על קשתות שוות באורכן, כל אחת באורך $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ המעגל. מיתרים הנשענים על קשתות שוות הן כמובן שוות אורך ולפיכך המרובע המדובר הוא שווה צלעות. כדי להוכיח שהוא גם שווה-זוויות (כולן זוויות ישרות) נבחין בכך שכל זווית של המרובע היא זווית היקפית (במעגל החוסם את המתומן) שצלעותיה הם מיתרים הפורשים רבעי מעגל ולפיכך הזווית ההיקפית עצמה פורשת חצי מעגל, לכן היא נשענת על קוטר ולכן היא זווית ישרה.

ב. יחס השטחים המבוקש אינו תלוי בגודל המתומן (למשל, באורך הצלע שלו) כי כל המתומנים המשוכללים הם בעלי דמיון גיאומטרי ונבדלים זה מזה רק בקנה המידה שלהם. נניח לנוחיות הדיון שרדיוס המעגל החוסם את המתומן הוא באורך 1 (אחרת, יוכפלו השטחים הנדונים בריבוע הרדיוס והיחס ביניהם לא ישתנה). ניעזר בסימוני התרשים. כמו כן נסמן את שטח הריבוע ב-R, את שטח המתומן ב-M ואת שטח המשולש ABC ב-S. נשים לב כי M = R+4S ולפיכך היחס המבוקש I ניתן על ידי $I=\frac{M}{R}=\frac{R+4S}{R}=1+4\frac{S}{R}$. לפי משפט פיתגורס, אורך צלע הריבוע הוא $\sqrt{2}$ ולכן R = 2.

המשולש ABC הוא שווה-שוקיים (שוקיו – צלעות המתומן) שבבסיסו צלע הריבוע שאורכה כאמור $\sqrt{2}$. נסמן את תחתית הגובה h לבסיס זה ב-T. שוב, בהסתמך על משפט פיתגורס לגבי המשולש ATO מקבלים $h=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולפיכך $S=\frac{1}{2}(base\ AC)\cdot h=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ובהתאם לכך היחס המבוקש:

$$I=\frac{M}{R}=\frac{R+4S}{R}=1+4\frac{S}{R}=1+4\frac{(\sqrt{2}-1)/2}{2}=1+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}$$