School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

## פתרונות (16.02.2021)

**1.** א. (8 נק') על הישר הממשי נתונה הפונקציה הריבועית $f(x)=x^2+4x+3$. האם $f$ היא פונקציה חד-חד-ערכית (חח"ע) על כל הישר הממשי ? האם היא חח"ע על הקרן $[-1,\infty)$ ? האם היא חח"ע על הקרן $(-\infty,-1]$ ? הוכיחו את תשובותיכם.

ב. (9 נק') ההרכבה $f\circ g$ של שתי פונקציות ( $f$ ו- $g$ ) היא הפונקציה המוגדרת על ידי $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ לכל $x$ שעבורו $g(x)$ שייך לתחום ההגדרה של $f$. לשם פשטות נניח ששלשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה המהווה גם את הטווח המשותף להן, ולא עוד אלא ששתיהן פונקציות **על** (הנחות אלה, ואף פחות מהן, מבטיחות ששתי ההרכבות מוגדרות היטב). האם $g\circ f=f\circ g$ ? אם כן – הוכיחו; אם לאו – הציגו דוגמה נגדית.

**פתרון:** א.

$$f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1=(x+2-1)(x+2+1)=(x+1)(x+3) \quad\Rightarrow\quad f(-1)=f(-3)=0$$

אם כן, $f$ מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות $x$ שונות ( $x=-1, x=-3$ ) השייכות לקרן (הסגורה מימין) $(-\infty,-1]$ ומכאן שהיא אינה חח"ע על קרן זו, ולא כל שכן על כל הישר. כדי לבדוק חד-חד ערכיות על הקרן $[-1,\infty)$ יש לבצע ניתוח נוסף:

$$f(x)=(x+2)^2-1\geq -1 \;\; for\, all\, x, \quad f(-2)=-1 \quad\Rightarrow\quad \min_{x\in R} f(x)=-1$$

ומינימום זה מתקבל בנקודה $x=-2$ (הנקודה $(-2,-1)$ במישור היא קדקוד הפרבולה המהווה את הגרף של הפונקציה הריבועית $f$ ). כמו כן, לא קשה להיווכח שמשני צדי המינימום, הפונקציה מונוטונית ממש (יורדת מצד שמאל ועולה מצד ימין) ומשום כך חח"ע בכל אחד משני הצדדים. מאחר שהקרן $[-1,\infty)$ שוכנת כולה מצד ימין של המינימום, הפונקציה $f$ היא חח"ע עליה.

ב. התשובה היא **לא** והנה דוגמה נגדית פשוטה: נגדיר על הישר הממשי את שתי הפונקציות הליניאריות $f(x)=x+1$ ו- $g(x)=2x+3$ ונחשב

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)=(2x+3)+1=2x+4$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2(x+1)+3=2x+5$$

שהן כמובן שתי פונקציות שונות.

2/-

**2.** בהינתן מספר מרוכב $z=x+iy\neq 0$ , א. הציגו את $z^{-1}\doteq \mathrm{Re}(z^{-1})+i\,\mathrm{Im}(z^{-1})$ באמצעות $x$ ו- $y$ .

ב. הציגו את $z^{-1}$ באמצעות $\bar{z}$ ו- $|z|$. ג. הציגו את $\left(\frac{3-4i}{25}\right)^{-1}$ בצורה $x+iy$ . (17/3 נק' לכל סעיף).

**פתרון:** א ו-ב. $$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

הביטוי לפני האחרון מספק פתרון לסעיף א' והאחרון לסעיף ב'.

ג. $$\left(\frac{3-4i}{25}\right)^{-1}=\frac{25}{3-4i}=\frac{25(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{25(3+4i)}{3^2+4^2}=3+4i$$

**3.** א.(6 נק') הוכיחו שלכל מספר טבעי $n$, $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ עבור $k=1,2,...,n$ .

כזכור, $\binom{n}{0}=1$ לכל $n$ טבעי.

ב.(11 נק') הציגו את הביטוי הכפלי $(1+x)^n$ (חזקה $n$-ית של הבינום (דו-איבר) $1+x$) כסכום של מונומים (חד-איברים, חזקות של $x$ עם מקדמים קבועים) והוכיחו באינדוקציה (על $n$) את נכונות ההצגה.

**פתרון:** א. כזכור $\binom{n}{k}$ מסמן על פי הגדרתו את מספר הקבוצות החלקיות בגודל $k$ של קבוצה בגודל $n$ .
ניתן למצוא את הערך המספרי של גודל זה בטיעונים קומבינטורים ואז להוכיח את הזהות המבוקשת באמצעות חישוב פשוט למדי. בחרנו כאן להציג הוכחה קומבינטורית טהורה המבוססת על ההגדרה בלבד. בהינתן קבוצה A בת $n+1$ איברים, נבחר איבר שרירותי מתוכה ונקרא לו הכוכב. אוסף כל הקבוצות החלקיות בגודל k של A מורכב מהקבוצות שאינן מכילות את הכוכב, שמספרן $\binom{n}{k}$ (כי כל אחת מהן היא תת-קבוצה כלשהי של A שאינה מכילה את הכוכב) ומהקבוצות המורכבות מהכוכב ועוד k-1 איברים שנבחרו מ- n האיברים של A שאינם הכוכב ולפיכך מספרן הוא $\binom{n}{k-1}$ וכשמסכמים את גדלי שני האוספים החלקיים (שהם כמובן זרים) מתקבל השוויון שנדרשנו להוכיח.

3/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

ב. כדי למשש את הדופק, נבדוק תחילה מה קורה ל-$n$-ים קטנים:

$$(1+x)^1 = 1+x = \binom{1}{0}+\binom{1}{1}x$$

$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1+2x+x^2 = \binom{2}{0}+\binom{2}{1}x+\binom{2}{2}x^2$$

$$(1+x)^3 = (1+x)^2(1+x) = 1+3x+3x^2+x^3 = \binom{3}{0}+\binom{3}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{3}{3}x^3$$

$$(1+x)^4 = (1+x)^3(1+x) = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 = \binom{4}{0}+\binom{4}{1}x+\binom{4}{2}x^2+\binom{4}{3}x^3+\binom{4}{4}x^4$$

מסתמן המתכון הכללי $(1+x)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

טענה: $(1+x)^n = \sum_0^n \binom{n}{k}x^k$

הוכחה (באינדוקציה, כנדרש): הטענה נבדקה לעיל עבור $n=1$.
הנחת האינדוקציה: הטענה נכונה למספר טבעי כלשהו $n$.
הוכחה ל-$n+1$ על סמך הנחת האינדוקציה:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = (1+x)^n + x(1+x)^n = \sum_0^n \binom{n}{k}x^k + \sum_0^n \binom{n}{k}x^{k+1} =$$

$$= \sum_0^n \binom{n}{k}x^k + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^j = \binom{n}{0}x^0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right\}x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0}x^0 + \sum_1^n \binom{n+1}{k}x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{0}x^k$$

השוויון השלישי בשורה הראשונה נובע מהנחת האינדוקציה ואילו השוויון הראשון בשורה השלישית מבוסס על הטענה שהוכחה בסעיף א' של השאלה. **מ.ש.ל.**

**4.** א. (8 נק') הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית $tg(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

ב. (9 נק') חשבו (באופן מספרי) את $\cos(\frac{\pi}{8}) \doteq \cos 22.5^\circ$.

תזכורת:

$$\sin(x\pm y) = \sin(x)\cos(y)\pm\sin(y)\cos(x) \qquad \cos(x\pm y) = \cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$$

**4/-**

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

**פתרון:** א. על פי הנוסחאות שבתזכורת עם $x=y=\alpha/2$ , ובהתחשב בעובדה ש- $1-\sin^2(\cdot)=\cos^2(\cdot)$ (משפט פיתגורס) מקבלים:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{t}g(\frac{\alpha}{2})$$

וזו הנוסחה שהוכחתה התבקשה (בהיפוך אגפי השוויון).

ב. כידוע (ונובע ממשפט פיתגורס) אורך היתר במשולש ישר זווית שווה שוקיים גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצב ולפיכך $\cos 45^\circ=\sqrt{2}/2=\sin 45^\circ$ . מכאן:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^\circ=\cos(2\cdot 22.5^\circ)=\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ=2\cos^2 22.5^\circ-1\ \Rightarrow\ \cos^2 22.5^\circ=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

ולבסוף $\cos 22.5^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\simeq\frac{1}{2}\sqrt{3.4}\simeq 0.9$ (הקוסינוס ברביע הראשון הוא חיובי כך הפתרון השלילי אינו רלבנטי).

**5.** החלק השלם של מספר ממשי $x$ מוגדר כמספר השלם היחיד $\underline{x}$ שעבורו $\underline{x}\le x<\underline{x}+1$ .

א. (11נק') הוכיחו שמספר הספרות בהצגה עשרונית של מספר טבעי $n$ הוא 1 + (החלק השלם של $\log_{10} n$). ב. (6 נק') כמה ספרות יש בהצגה העשרונית של $2^{1000}$ אם $\log_{10}2\simeq 0.3010$ ?

**פתרון:** א. המספר הטבעי הקטן ביותר בן $k$ ספרות עשרוניות הוא $10^{k-1}=100\ldots00$ והגדול ביותר הוא $10^k-1=9\ldots99$ . יהי $k_n$ מספר הספרות בהצגה העשרונית של המספר הטבעי $n$ , אזי

$$10^{k_n-1}\le n\le 10^{k_n}-1<10^{k_n}\ \Leftrightarrow\ k_n-1\le\log_{10}n<k_n$$

(השקילות נובעת מהמונוטוניות העולה ממש של פונקציית הלוגריתם (לכל בסיס גדול מ-1))

ומכאן (על פי הגדרת הערך השלם) ש- $k_n-1$ הוא החלק השלם של $\log_{10}n$ שפירושו (הערך השלם של $\log_{10}n$) $k_n=1+$ . **מ.ש.ל**

ב. $\log_{10}2^{1000}=1000\log_{10}2=1000\times 0.3010=301$ ולפיכך מספר הספרות המבוקש הוא $302$ .



●●● קריית האוניברסיטה, ת"ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

**6.** במדידת טמפרטורה, כל שינוי (תוספת או מגרעת) של מעלה אחת בסקאלה של פרנהייט שקולה לשינוי של $5/9$ המעלה בסקאלה של צלזיוס. כמו כן, טמפרטורה של 86 מעלות פרנהייט שווה לטמפרטורה של 30 מעלות צלזיוס.

א.(10 נק') מצאו נוסחה המציגה את הטמפרטורה $F$ במעלות פרנהייט כפונקציה של הטמפרטורה $C$ במעלות צלזיוס. הוכיחו את הממצא שלכם.

ב.(7 נק') באיזו טמפרטורה המדידות בשתי הסקאלות משתוות?

**פתרון:** א. על פי הנתון הראשון, שינוי של $C$ מעלות צלזיוס שקול לשינוי של $(9/5)C = 1.8C$ מעלות פרנהייט. נתחיל ב-30 מעלות צלזיוס השווים על פי הנתון השני ל-86 מעלות פרנהייט ונעשה את מאזן השינוי מטמפרטורה זו: $F - 86 = 1.8(C - 30)$ ומכאן $F = 1.8C + 32$ פונקציה ליניארית עם שיפוע 1.8 והזזה מקבילה מהראשית כך שהישר המייצג אותה יעבור דרך הנקודה $(C,F) = (0,32)$ .

ב. נציב $C = F$ במשוואה שמצאנו בסעיף א' ונקבל

$C = 1.8C + 32 \Rightarrow C = -40 = F$ כלומר המדידות משתוות במינוס 40 מעלות.