School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (10.09.2021)

1. תהי f הפונקציה הריבועית הפשוטה $f(x)=x^2$ על הישר הממשי.

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים y,x ולכל $0\le\alpha\le 1$,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

וקבעו עבור אילו ערכי α יש שוויון לכל y,x ועבור אילו זוגות (x,y) - לכל α?

ב. במערכת צירים במישור רשמו גרף של הפונקציה f (בקווים כלליים המשקפים את צורת הגרף) והעבירו מיתר - קטע המחבר שתי נקודות כלשהן על הגרף. בעזרת התרשים תנו אינטרפרטציה גיאומטרית לאי השוויון בסעיף א'

פתרון: א.

$$\begin{aligned}&f(\alpha x+(1-\alpha)y)=\\&(\alpha x+(1-\alpha)y)^2=\alpha^2x^2+(1-\alpha)^2y^2+2\alpha(1-\alpha)xy\\&\qquad\le \alpha x^2+(1-\alpha)y^2=\\&\alpha f(x)=(1-\alpha)f(y)\end{aligned}$$

עלינו להוכיח שהביטוי בשורה השלישית גדול מזה שבשורה השנייה, או שווה לו. לשם כך נחסיר את השנייה מהשלישית, ובשים לב לכך כי $\alpha-\alpha^2=(1-\alpha)-(1-\alpha)^2=\alpha(1-\alpha)$ נקבל שההפרש הוא: $\alpha(1-\alpha)(x^2+y^2-2xy)=\alpha(1-\alpha)(x-y)^2\ge 0$ אכן אי שלילי.

כמו כן, רואים ששוויון ל-0 של ההפרש הזה לכל y,x מתקיים אם-ורק-אם $\alpha\in\{0,1\}$, ולכל $\alpha\in(0,1)$ - אם-ורק-אם $x=y$.

ב. כידוע, הגרף של f הוא פרבולה עם ציר ה-Y כציר סימטריה, קדקוד בראשית הצירים, פתוחה כלפי מעלה.

הנקודה $\alpha x+(1-\alpha)y$ שייכת לקטע שקצותיו הם x ו-y וכש-α סורק את [0,1] מ-0 עד 1, נקודה זו סורקת את הקטע המחבר את y עם x (בכיוון מ-y ל-x). בדומה, קבוצת הנקודות $\{(\alpha x+(1-\alpha)y,\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)):0\le\alpha\le 1\}$ במישור היא המיתר הנמתח בין הנקודות $(x,f(x))$ ו-$(y,f(y))$ על הגרף של f, כך שהמשמעות הגיאומטרית של אי השוויון היא שהמיתר נמצא מעל הגרף של הפונקציה בתחום שמתחתיו. אגב, פונקציה המקיימת את התנאי הנדון בשאלה זו נקראת פונקציה קמורה (convex), כזו המקיימת את אי-השוויון ההפוך נקראת קעורה (concave).

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

2. א. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים x המקיימים $|x-2|+|x-4|<30$

ב. הוכיחו: $\log_2(2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 20)<95$

פתרון: א. הבדיקה תתבצע בחלקים כאשר החלוקה של הישר הממשי לתחומים חלקיים מוכתבת על ידי הביטוי הנתון.

$$\begin{aligned} x\le 2: &\quad |x-2|+|x-4|=(2-x)+(4-x)=6-2x<30 \iff x>-12 \\ 2<x\le 4: &\quad =(x-2)+(4-x)=2<30 \\ 4<x: &\quad =(x-2)+(x-4)=2x-6<30 \iff x<18 \end{aligned}$$

ומכאן נובע שאי השוויון (החזק) מתקיים אם-ורק-אם $x\in(-12,18)$. בקצות הקטע קיים שוויון ומחוצה לו הביטוי גדול (ממש) מ-30.

ב. $\log_2(2\cdot 3\cdot ...\cdot 20)=\log_2 2+\log_2 3+...+\log_2 20<19\log_2 20<19\cdot 5=95$

הסבר: האי-שוויון הראשון נובע מהעובדה שכל אחד מ-19 המחוברים קטן (ממש) מהמחובר האחרון כי הלוגריתם (על בסיס 2) הוא פונקציה עולה, ואילו האי שוויון השני תקף כי $2^5=32>20$.

3. א. האם $\cos 15^\circ>\sin 15^\circ>0$? הוכיחו את תשובתכם

ב. הוכיחו כי

$$\frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=\sqrt{3}$$

פתרון: א. התשובה לשאלה היא 'כן', מפני ש-:
במשולש ישר זווית עם זווית חדה של 15 מעלות, הזווית החדה השנייה היא בת 75 מעלות והיא הגדולה מבין השתיים. אורכי הניצבים במשולש, כשכל אחד מחולק באורך היתר, הם (על פי הגדרה) הסינוס והקוסינוס של זווית בת 15 מעלות, כשהניצב מול הזווית הזאת נותן את הסינוס שלה והניצב שלידה – את הקוסינוס. מאחר שבמשולש (כל משולש, לאו דווקא ישר זווית) הצלע הארוכה יותר מבין שתיים, היא זו השוכנת מול הזווית היותר גדולה מבין השתיים, הקוסינוס של 15 מעלות גדול מהסינוס. שהסינוס של 15 מעלות הוא גודל חיובי נובע מהחיוביות של אורך של קטע. טיעון אלטרנטיבי: בקטע $[0,\pi/2]$ פונקציית הסינוס עולה מ-0 ל-1 בעוד שפונקציית הקוסינוס יורדת מ-1 ל-0. שתי הפונקציות האלה משתוות במרכז הקטע $15^\circ=\pi/12<\pi/4$ ומחליפות את יחסי הגודל ביניהן, כשעד לאותה נקודה (וזה כאמור כולל את 15מעלות) הקוסינוס גדול מהסינוס.

3/-

ב. מאחר שהוכחנו בסעיף א' שהמונה והמכנה חיוביים, השוויון המבוקש שקול לשוויון הריבועים של שני אגפיו.

$$\left(\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}\right)^2 = \left(\frac{\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ + 2\cos 15^\circ \sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ - 2\cos 15^\circ \sin 15^\circ}\right) = \frac{1+\sin 30^\circ}{1-\sin 30^\circ} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

כידוע $\sin 30^\circ = 1/2$ וזה מצדיק את השוויון לפני האחרון, ואילו זה שלפניו נובע ממשפט פיתגורס ומנוסחת הסינוס של זווית כפולה.

4. סביב ישר נתון מפוזרות במישור $m+n$ נקודות, m מהן מצדו האחד ו-n מצדו השני, אף לא אחת מהנקודות על הישר עצמו. מחברים את כל הנקודות זו לזו בקטעים ישרים.

א. כמה מהקטעים חותכים את הישר הנתון? (5 נקודות)

ב. כמה מהקטעים אינם חותכים את הישר הנתון? (5 נקודות)

ג. הוכיחו כי $m\cdot n+\binom{m}{2}+\binom{n}{2}=\binom{m+n}{2}$ בשני אופנים: בחישוב אלגברי ובטיעון קומבינטורי.

פתרון: א. קטע חותך את הישר הנתון אם-ורק-אם קצותיו הם משני צדי הישר. כל אחת מ-m הנקודות בצד האחד יוצרת n קטעים שקצותיהם האחרים בצד השני ולכן חותכים את הישר, כך שבסך הכל יש $m\cdot n$ קטעים כאלה.

ב. כל קבוצה בת שתי נקודות יוצרת קטע וקבוצות שונות בנות שתי נקודות יוצרות קטעים שונים, כך שמספר הקטעים זהה למספר התת קבוצות בנות שתי נקודות. בצד האחד של הישר הנתון יש $\binom{m}{2}$ קבוצות כאלה ובצדו השני $\binom{n}{2}$ כך שבסך הכל יש $\binom{m}{2}+\binom{n}{2}$ קטעים שאינם חותכים את הישר הנתון.

ג. את החישוב האלגברי נשאיר לקוראים ונסתפק כאן בהבאת הטיעון הקומבינטורי. ובכן, קבוצת כל הקטעים, שמספרם $\binom{m+n}{2}$, מתחלקת לשתי קבוצות זרות: קבוצת הקטעים החותכים את הישר (מספרן, כנטען בסעיף א', $m\cdot n$) והקבוצה של אלה שאינם חותכים אותו (שמספרם, כנטען בסעיף ב', $\binom{m}{2}+\binom{n}{2}$). כשמסכמים את גודלי הקבוצות החלקיות (הזרות, כאמור) ומשווים את הסכום עם גודל הקבוצה כולה, מתקבל השוויון המבוקש.

4/-

5. א. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה $z^3=(1+i)^6$ והציגו אותם הן בהצגה פולארית ($z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$) והן בהצגה קרטזית ($z=x+iy$)

ב. חשבו את שטח המצולע שקדקודיו הם פתרונות המשוואה במישור המרוכב

פתרון: א. תחילה נזכיר לעצמנו שאם $z^3=w=|w|(\cos\theta+i\sin\theta)$ אז, עבור $k=0,1,2$,

$z=z_{0,1,2}=\sqrt[3]{|w|}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3})$ וכעת נחשב

$$w=(1+i)^6=\{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\}^6=8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^6=8(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$$

ולפיכך שלושת הפתרונות של המשוואה הנתונה הם:

$$z_0=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=2(0+i\cdot 1)=2i$$

$$z_1=2(\cos\frac{3/2+2}{3}\pi+i\sin\frac{3/2+2}{3}\pi)=2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$$

$$=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i(-\frac{1}{2}))=-(\sqrt{3}+i)$$

$$z_2=2(\cos\frac{3/2+4}{3}\pi+i\sin\frac{3/2+4}{3}\pi)=2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})=\ldots=\sqrt{3}-i$$

ב. המצולע המדובר הוא משולש שקדקודיו z_2,z_1,z_0. נחשב את אורכי צלעות המשולש:

$$a=|z_0-z_1|=|\sqrt{3}+3i|=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$$

$$b=|z_0-z_2|=2\sqrt{3}\qquad c=|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$$

באופן לא מפתיע (חשבו מדוע) המשולש הוא שווה צלעות עם צלעות באורך $2\sqrt{3}$ ועל כן גובהו הוא בעל אורך $h=a\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2=3$ ולפיכך שטח המשולש הוא

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})\cdot 3=3\sqrt{3}$$

●●● קריית האוניברסיטה, ת״ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

6. א. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n , $3^{4n}-2^{4n}$ מתחלק (ללא שארית) ב-65 (10 נקודות)

ב. האם קיים n טבעי שעבורו הביטוי בסעיף א' מתחלק ב-130? הוכיחו תשובתכם (7 נק')

פתרון: א. ניתן להוכיח את הטענה באינדוקציה, אך נציג כאן באופן ישיר פירוק של ההפרש הנתון למכפלה של שני גורמים.

$$3^{4n}-2^{4n}=(3^4)^n-(2^4)^n=81^n-16^n$$
$$=(81-16)(81^{n-1}+81^{n-2}\cdot16+...+81\cdot16^{n-2}+16^{n-1})$$

(בדקו את תקפות השוויון האחרון)

כך שלכל n טבעי הביטוי הנתון הוא כפולה שלמה של $81-16=65$ ולכן מתחלק ב-65 ללא שארית.

מה שהוכחנו למספרים הספציפיים (81 ו-16) נכון באופן כללי: הפרש בין חזקות של מספרים שלמים עם אותו מעריך טבעי הוא כפולה שלמה של ההפרש בין בסיסי החזקות (נסו להיווכח בטענה זו).

ב. אין n כזה.

הוכחה: 2 הוא גורם של $2\cdot65=130$ ולכן רק מספר זוגי יכול להתחלק ב-130 ואילו הפרש החזקות הנתון הוא אי-זוגי לכל n, כי חזקה טבעית של 3 היא אי-זוגית ושל 2 - זוגית, והפרש בין מספרים בעלי זוגיות שונה הוא מספר אי-זוגי.