School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (08.04.22)

1. א. יהי n מספר טבעי. הוכיחו שאם 2^n-1 ראשוני (אין לו מחלקים זולת עצמו ו-1) אז גם n ראשוני. (8 נקודות)

ב. הוכיחו שאם 2^n-1 הוא מספר ראשוני (ואז, על פי סעיף א', גם n ראשוני) אז $N:=2^{n-1}(2^n-1)$ הוא פרפקטי (מושלם) כלומר N שווה לסכום כל מחלקיו, לרבות 1 ולמעט הוא עצמו. (9 נקודות)

פתרון: א. נוכיח (בשלילה) שאם n אינו ראשוני, אז גם 2^n-1 אינו ראשוני. הוכחה: נניח אם כן ש-n אינו ראשוני, אז הוא מתפרק לשני גורמים, $n=ab$, b,a מספרים טבעיים > 1. ואז $2^n-1=2^{ab}-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)\cdot(1+2^a+(2^a)^2+(2^a)^3+\ldots+(2^a)^{b-1})$ אינו ראשוני.

ב. קבוצת כל המחלקים של N היא $\{1,2,\ldots,2^{n-1},(2^n-1)(1,2,2^2,\ldots,2^{n-2})\}$ (אין מחלקים אחרים כי 2^n-1 הוא ראשוני) וסכום כל אבריה:

$$(1+2+\ldots+2^{n-1})+(2^n-1)(1+2+\ldots+2^{n-2})=(2^n-1)(1+2^{n-1}-1)=(2^n-1)2^{n-1}=N$$

מידע נוסף: 1.מספרים ראשוניים מהצורה 2^n-1 נקראים על שם התיאולוג והמדען הצרפתי מהמחצית הראשונה של המאה ה-17 Marin Mersenne שחקר אותם. לא ידוע אם קבוצת הראשוניים של מרסן היא סופית או אינסופית, אך המצוד אחרי מספרים ראשוניים גדולים מאד מתרכז בעיקר בחיפוש בקרב הראשוניים של מרסן. 2. כבר היוונים הקדמונים ידעו שמספרים מהצורה המוצגת בסעיף ב' הם פרפקטיים. במאה ה-18 (כאלפיים שנה יותר מאוחר) הוכיח אוילר שכל מספר פרפקטי זוגי הוא מטיפוס זה. לא ידוע אם קיימים מספרים פרפקטיים אי-זוגיים.

2. תהיינה C,B,A קבוצות. הוכיחו או הפריכו (באמצעות דוגמה נגדית) את הטענות הבאות:

א. אם $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ **וגם** $A\cup C=B\cup C$ **אז** $A=B$ (9 נקודות)

ב. אם $A\cap B\cap C=\varnothing$ **וגם** $A\cap C=B\cap C$ **אז** $A=B$ (8 נקודות)

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א. הטענה הזאת נכונה כי ל C אין איברים משותפים לא עם A ולא עם B כך ש-

$$(A\cup C)\setminus C=A$$
$$=(B\cup C)\setminus C=B$$

ב. טענה זו אינה תקפה. הנה דוגמה נגדית לה: יהי $A=\{1\},\ B=\{2\},\ C=\{3\}$ שלוש הקבוצות זרות זו לזו (זרות בזוגות) וכל החיתוכים המופיעים בטענה הם ריקים, אבל $A\neq B$.

3. א. מצאו את כל ערכי t הממשיים שעבורם $|t-2|+|t-4|<30$ (7 נקודות)

ב. מצאו את כל ערכי x הממשיים שעבורם $|x^2-7x-2|+|x^2-7x-4|<30$ (10נקודות)

פתרון: $t<2:\quad |t-2|+|t-4|=2-t+4-t=6-2t<30 \Leftrightarrow 2t>-24 \Leftrightarrow t>-12$

$$2\le t\le 4:\ |t-2|+|t-4|=t-2+4-t=6<30$$
$$t>4:\ |t-2|+|t-4|=t-2+t-4=2t-6<30 \Leftrightarrow t<18$$

וכשנסכם את התוצאות בשלושת התחומים, נקבל שקבוצת הערכים המבוקשת היא הקטע $(-12,18)$

4. נעין בסדרה $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$ $(n\ge 1)$. א. חשבו את ערכם המספרי של a_1,a_2,a_3,a_3

ב. הוכיחו שלכל n טבעי $a_n\ge\frac{1}{2\sqrt{n}}$ (7 נקודות)

ג. הוכיחו שלכל n טבעי $\sum_{k=1}^{n}a_k\ge\frac{\sqrt{n}}{2}$ (8 נקודות)

פתרון: א. $a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8},\ a_3=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{48},\ a_4=\frac{15}{48}\cdot\frac{9}{8}=\frac{135}{384}$

ב. נוכיח את הטענה באינדוקציה. בדיקה לגבי $n=1$: $a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{1}}$ כך שבמקרה זה יש שוויון. הנחת האינדוקציה: הטענה נכונה עבור n טבעי קבוע כלשהו. הוכחת הטענה עבור $n+1$ על סמך הנחת האידוקציה:

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}=a_n\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}\;?\geq?\;\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ ואמנם אי השוויון האחרון שקול ל- $\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\sqrt{1-\frac{1}{n}}\leq 1-\frac{1}{2n+2}$ ואי שוויון זה מתקיים כפי שאפשר להיווכח על יד העלאת שני אגפיו בריבוע.

ג. גם כאן נציג הוכחה אינדוקטיבית. עבור $n=1$ מתקבל ½ בשני האגפים (שוויון). הנחת האינדוקציה: הטענה נכונה עבור n טבעי כלשהו. הוכחה עבור $n+1$ על סמך טענת האינדוקציה: נסמן ב- S_n סכום n האיברים הראשונים של הסדרה.

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq\frac{\sqrt{n}}{2}+a_{n+1}\geq\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+1}}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{n})>\frac{\sqrt{n+1}}{2}$$

האי-שוויון הראשון (השמאלי) נובע מהנחת האינדוקציה והתוצאה בסעיף א'.

5. תהי X קבוצה בת $2\leq n$ איברים ויהיו b,a שני איברים שונים של X

א. כמה קבוצות חלקיות של X הן זרות לקבוצה $\{a,b\}$? (4 נקודות)

ב. כמה מהן מכילות את הקבוצה $\{a,b\}$? (6 נקודות)

ג. כמה מהקבוצות האלות מכילות את $\{a\}$ אבל לא את b ? את $\{b\}$ אבל לא את $\{a\}$ (7 קודות)

בטאו את תשובותיכם כפונקציה של n.

פתרון: א. יש $n-2$ איברים שאינם a או b ומספר תת הקבוצות שלהם הוא $2^{n-2}=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}$ ב. כל קבוצה חלקית כזאת מורכבת מהקבוצה $\{a,b\}$ ועוד קבוצה חלקית כל שהיא של $n-2$ האיברים האחרים ולכן מספרן של הקבוצות החלקיות האלה אף הוא 2^{n-2}. ג. גם כאן, בשני המקרים, התשובה היא 2^{n-2}.

6. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

פתרון: לפנינו משוואה פולינומיאלית ממעלה 4 אך למזלנו היא דו-ריבועית, כלומר ריבועית ב- z^2 ולפיכך: $(z^2)+z^2+1=(z^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\Rightarrow z^2=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$

ולכן

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{cis\frac{\pi}{6}} = \pm cis\frac{\pi}{12} = \pm(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ) = \pm(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$$

$$z_{3,4} = \pm\sqrt{cis(-\frac{\pi}{6})} = \pm cis(-\frac{\pi}{12}) = \pm(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$$

ואלה הם ארבעת הפתרונות של המשוואה הנתונה.
הסבר: לחישוב הסינוס והקוסינוס של 15 מעלות השתמשנו בנוסחת הסינוס של זווית כפולה ובעובדה שסינוס של 30 מעלות הוא חצי.

קריית האוניברסיטה, ת״ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543