School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות

מבחן סיווג במתמטיקה (21.05.2020 מועד קורונה)

1. יהיו $a,b\in R$ (שני מספרים ממשיים).

א. הוכיחו כי $a\neq b$ אם-ורק-אם קיים $0<c$ כך ש- $|a-b|>c$.

ב. תהי $f:R\to R$ פונקציה חד-חד-ערכית. הוכיחו כי $a\neq b$ אם-ורק-אם קיים $0<c$ כך ש- $|f(a)-f(b)|>c$

האם טענה זו תישאר תקפה גם כאשר הפונקציה הנתונה אינה חד-חד-ערכית ?

שימו לב: הביטוי "אם-ורק-אם" משמעו שיש להוכיח טענה והיפוכה.

פתרון: א. $a\neq b \;\Leftrightarrow\; a-b\neq 0 \;\Leftrightarrow\; |a-b|>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}|a-b|>0$

וכמובן שהערך המוחלט של הפרש שני המספרים הנתונים גדול מחציו של אותו ערך מוחלט,

כך ש- $c=\frac{|a-b|}{2}$ מקיים מה שנדרש להוכיח. לבסוף, מאחר שכל החיצים בטיעון לעיל הם דו כיווניים (הסימן המקובל לגרירה הדדית (שקילות) בין הנטען משני צדי החץ) הוכחה הטענה והיפוכה.

ב. על פי ההגדרה, חד-חד-ערכיות של f פירושה שאם $a\neq b$ אז גם $f(a)\neq f(b)$ כך שהטענה (והיפוכה) בחלק ב' נובעת ישירות מהטענה שהוכחה בחלק א' .

הטענה אינה נכונה אם הפונקציה f אינה חד-חד-ערכית, כי העדר חד-חד-ערכיות פירושו שקיימים שני מספרים שונים a ו- b כך ש- $f(a)=f(b)$. לדוגמא, אם $f(x)=x^2$ אז $f(-2)=f(2)=4$ על אף ש- $-2\neq 2$.

2. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n ולכל מספר ממשי $-1<x$, $(1+x)^n\geq 1+nx$. עבור אלו n ו- x מתקיים השוויון?

פתרון: התנאי $-1<x$ מבטיח שאגף שמאל הוא חיובי לכל n , ואילו כאשר $-1>x$, אגף שמאל שלילי לכל n אי-זוגי. אמנם גם אגף ימין הוא שלילי (לכל n, לא רק אי זוגי) אך החזקה באגף שמאל גוברת (בשליליותה) על הגידול הלינארי באגף ימין ואי השוויון מתהפך.

בתחום הנדרש של ערכי x נוכיח את הטענה בשיטת האינדוקציה.

בדיקה עבור $n=1$: $\quad 1+x=(1+x)^1=1+1\times x=1+x$

הנחת האינדוקציה: $\quad (1+x)^m\geq 1+mx$ לכל $n\geq m$

הוכחת הטענה עבור $m=n+1$ בהסתמך על הנחת האינדוקציה:

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)=1+nx+x+nx^2=$$
$$1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x$$

אי השוויון בשורה הראשונה נובע מהנחת האינדוקציה וזה שבשורה השנייה כי $0\leq x^2$. **מ.ש.ל**

נותר לקבוע את קבוצת הזוגות (x,n) שעבורם מתקיים שוויון:

$$\{(x,n): x\in(-1,\infty), n\in N, (1+x)^n=1+nx\}=\{0\}\times N\cup R\times\{0,1\}$$

בדקו שאכן זו קבוצת השוויון המבוקשת.

3. מצאו את קבוצות המספרים הממשיים x שעבורם מתקיים כל אחד מאי השוויונות הבאים:

א. $|\log_2 x|>1$ ב. $\log_2 x+\log_x 2>3$

פתרון: א. $|\log_2 x|>1 \iff (\log_2 x>1 \quad or \quad \log_2 x<-1)$

על פי הגדרת פונקציית הלוגריתם כפונקציה ההפוכה של פונקציה מעריכית (ביחס לאותו בסיס):

$\log_2 x<-1 \iff x<2^{-1}=\frac{1}{2}$ $\quad \log_2 x>1 \iff x>2^1=2$ ולפיכך

$$\{x:|\log_2 x|>1\}=(2,\infty)\cup(0,\frac{1}{2})$$

בקטע המספרים בין חצי ל-2 אי השוויון מתהפך ובקצותיו קיים שוויון.

ב. נשים תחילה לב שכדי שאגף שמאל יהיה מוגדר היטב, x צריך להיות מספר חיובי. כמו כן, כאשר $1>x$, אגף שמאל הוא שלילי (מדוע?) כך שאי השוויון מתהפך.

על פי כללי הלוגריתם, $\log_x 2=(\log_2 x)^{-1}$. לנוחיותנו, נסמן את $(\log_2 x)^{-1}$ ב- y. במונחי y אי השוויון הנתון שקול ל- $y+y^{-1}>3$, השקול ל- $y^2-3y+1>0$, השקול ל- (בדקו) $(y-\frac{3}{2})^2>\frac{5}{4}$

וזה קורה (בדקו) אם-ורק-אם $(y<\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad or \quad y>\frac{3+\sqrt{5}}{2})$. בתרגום חזרה למונחי x מתקבל

$$x>2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \iff y=\log_2 x>\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{או} \quad x<2^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \iff y=\log_2 x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

בסיכום, הקבוצה המבוקשת היא: $(1,2^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}})\cup(2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}},\infty)$

4. א. בהיות z מספר מרוכב השונה מ-0 ומ-1, הוכיחו שלכל מספר טבעי $1\le n$,

$$z^{-n} + z^{-n+1} + \ldots + z^{-1} + 1 + z + \ldots + z^{n-1} + z^{n} = \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z-1}$$

ב. כזכור $e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x$ כאשר x מספר ממשי. הוכיחו שלכל t ממשי

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$$

פתרון: א.הסדרה $\{z^k\}_{-n}^{+n}$ היא סדרה גיאומטרית באורך (מספר איברים) $2n+1$ עם איבר ראשון z^{-n}, איבר אחרון z^n ומנה (בין איבר לקודמו) z. כל היודע-זוכר את נוסחת הסכום של טור גיאומטרי כפונקציה של הנתונים שצוינו (איבר ראשון, איבר אחרון ומנה) יבחין בנכונות השוויון הנתון. ואם תבקשו שלא נסתמך על הידע-זיכרון שלכם, אז הנה הוכחה מפורטת:

$$z^{-n} + \ldots + 1 + \ldots + z^{n} = z^{-n}(1 + z + z^2 + \ldots + z^{2n}) = \frac{z^{-n}[(z-1)(1+\ldots+z^{2n})]}{z-1} =$$

$$= \frac{z^{-n}(z^{2n+1}-1)}{z-1} = \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z-1}$$

וודאו את נכונות החישובים האלה המוכיחים את הטענה.
הערך $z=1$ הוחרג כי עבור ערך זה אגף ימין חסר מובן ואילו אגף שמאל שווה ל-$2n+1$ (מספר המחוברים בסכום שכולם 1). עבור $z=0$ שני האגפים חסרי מובן.
ב. כאשר מחברים את שני השוויונות ב"כזכור" (עבור $x = kt$) הסינוס מתקזז ומקבלים $2\cos kt$.
בשינוי סדר הסיכום באגף שמאל מתקבל:

$$\text{אגף שמאל} = e^{0t} + \sum_{k=1}^{n}(e^{+kt} + e^{-kt}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kt = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt$$

מ.ש.ל. כאשר $t=0$ כל אחד משני אגפי השוויון שווה ל-$2n+1$ ($\cos 0 = 1$).

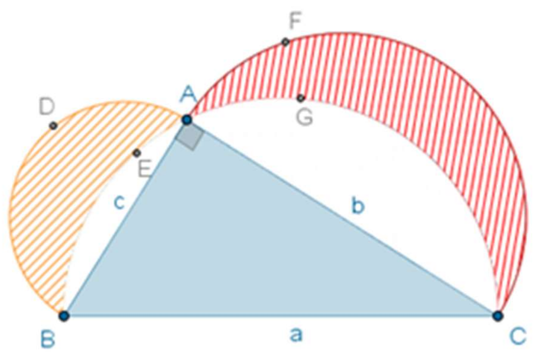
5. נתונות n נקודות במישור ש-k מהן $(3\le k)$ נמצאות על ישר אחד (כל אחת מאלה נמצאת על הישר הנקבע על ידי שתיים אחרות מהן). כל n הנקודות הנתונות מסודרות כך שלמעט הישר המכיל את k הנקודות הנ"ל, אין ישר נוסף המכיל יותר משתיים מהנקודות. קבעו, כפונקציה של k ו-n, כמה משולשים שונים שקדקודיהם בנקודות הנתונות ניתן להרכיב ?
פתרון: נסמן ב-L את הישר שעליו k מהנקודות. המשולשים מתחלקים לשני סוגים: אלה שאין להם אף קדקוד על הישר L ולעומתם אלה שיש להם קדקודים על L (בהכרח לא שלשתם). כל שלוש מ-$n-k$ הנקודות שאינן על L יוצרות משולש כך שמספר המשולשים מהסוג הראשון הוא $\binom{n-k}{3}$.
הסוג השני מתחלק לשני תת סוגים: משולשים עם קדקוד אחד על L

שמספרם (הסבירו) $k\binom{n-k}{2}$ ומשולשים בעלי שני קדקודים על L שמספרם $(n-k)\binom{k}{2}$
לפיכך מספר המשולשים הכולל ששלושת קדקודיהם בנקודות הנתונות הוא

$$\binom{n-k}{3}+k\binom{n-k}{2}+(n-k)\binom{k}{2}$$

שימו לב שבמקרה הקיצוני $k=n$ (כל הנקודות על ישר אחד) המספר הזה הוא 0 ומשקף את העובדה שאין כלל משולשים שניתן להרכיב מנקודות על ישר.

6. (סהרוני היפוקרטס**).** נתון משולש ישר זווית החסום במעגל.
א. הוכיחו שהיתר של המשולש הוא בהכרח קוטר של המעגל (כך שהתרשים מטה משקף נכונה את המבנה הגיאומטרי הנתון. רק חצי המעגל החוסם מופיע בתרשים).
ב. על כל אחד מניצבי המשולש (כלפי החוץ שלו) בונים חצי מעגל שקוטרו הוא הניצב ומרכזו אמצע אותו ניצב (ראו תרשים). כך נוצרים שני סהרונים (ירחים) המוגבלים בין חצאי המעגלים שהוספנו לבין הקשתות המתאימות של המעגל החוסם את המשולש.
הוכיחו שסכום שטחי שני הסהרונים שווה לשטח המשולש.



פתרון: נשתמש בחלק מהסימונים שבתרשים תוך שסימוני צלעות המשולש יציינו גם את אורכן.
א. כידוע, זווית היקפית במעגל שווה לחצי הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. על פי הנתון, הזווית ההיקפית שקדקודה A בתרשים היא זווית ישרה ולכן הזווית המרכזית המתאימה לה היא זווית שטוחה (בת 180 מעלות) כך שצלעותיה יוצרות קו ישר העובר דרך מרכז המעגל (קדקוד הזווית המרכזית) כלומר קוטר של המעגל.
ב.נסמן:
סכום שטחי הסהרונים = S
שטח חצי העיגול החוסם את המשולש = D
שטח המשולש = T
סכום שטחי המקטעים הכלואים בין ניצבי המשולש לבין הקשתות המתאימות של המעגל החוסם = K
נשים לב ש- K = D - T
סכום שטחי חצאי העיגולים שנבנו על ניצבי המשולש = M

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

עלינו להוכיח כי $S = T$.

הוכחה (עקבו בתרשים אחרי הנטען מטה) :

$$S = M - K = M - (D - T) = \pi[(\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2] - [\pi(\frac{a}{2})^2 - T] =$$

$$= \frac{\pi}{4}(b^2 + c^2 - a^2) + T = 0 + T = T$$

נוסחת שטח העיגול מכתיבה את השוויון השני בשורה הראשונה ומשפט פיתגורס – בשנייה.

מ.ש.ל

קצת היסטוריה לקינוח: היפוקרטס (מאה 5 לפנה"ס, לא האדם שעל שמו שבועת הרופאים) הגה את בעיית הסהרונים במסגרת מאמציו **לרבע את המעגל**, כלומר לבנות באמצעות מחוגה וסרגל ריבוע השווה בשטחו לעיגול נתון. לאמיתו של דבר, היפוקרטס מצא שסכום שטחי הסהרונים שווה לשטח המשולש רק במקרה הסימטרי כשהמשולש ישר-הזווית החסום במעגל הוא שווה-שוקיים. היה זה המתמטיקאי הערבי אל חסאן (965-1040) שהרחיב את התוצאה למשולש ישר זווית כללי.
במשך מאות שנים ניסו מתמטיקאים "לרבע את המעגל" באמצעות סרגל ומחוגה ולא הצליחו למצוא בנייה מתאימה, עד אשר ב-1882 הראה המתמטיקאי הגרמני Ferdinand von Lindeman שזו משימה בלתי אפשרית בהוכיחו ש- π הוא מספר שאינו אלגברי (שאין משוואה פולינומיאלית עם מקדמים רציונאליים, ותהיה מעלתה אשר תהיה, ש- π הוא אחד מפתרונותיה), בעוד שקטעים הניתנים לבנייה באמצעות סרגל ומחוגה (מקטע היחידה) הם בהכרח בעלי אורך שהוא מספר אלגברי. יתר על כן, רק מיעוטם של המספרים האלגבריים ניתנים לבנייה.