School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

# פ ת ר ו נ ו ת

## מבחן סיווג במתמטיקה (28.12.2018)

**1.** הוכיחו שלכל מספר טבעי **אי-זוגי** $1 \le n$, המספר $12^n + 1$ מתחלק ב-13 (ללא שארית).

**פתרון:** הטענה תוכח באינדוקציה. המספר האי-זוגי הראשון הוא $n=1$ ואכן $12^1+1=12+1=13$ מתחלק כמובן ב-13. הנחת האינדוקציה: $12^n + 1$ מתחלק ב-13 עבור $n$ אי-זוגי כלשהו. המספר האי-זוג העוקב ל-$n$ הוא $n+2$ ולכן עלינו להוכיח שאם $12^n+1$ (כאשר $n$ אי-זוגי) מתחלק ב-13, אז גם $12^{n+2} + 1$ מתחלק ב-13. הוכחה:

$$12^{n+2} + 1 = (12^n+1) + (12^{n+2} - 12^n) = (12^n+1) + 12^n(12^2-1) = (12^n+1) + 12^n(12+1)(12-1)$$
$$= (12^n+1) + 12^n \cdot 13 \cdot 11$$

עיון בביטוי המספרי האחרון מגלה שהמחובר הראשון שבסוגריים מתחלק ב-13 על פי הנחת האינדוקציה ואילו המחובר השני הוא כפולה מפורשת של 13. מאחר שסכום של מספרים טבעיים המתחלקים כ"א ב-13, מתחלק אף הוא ב-13, הרי הוכחה הטענה שנדרשנו להוכיח.
חומר למחשבה: בטיעון האחרון (ההוכחה על סמך הנחת האינדוקציה) לא השתמשנו במפורש בכך ש-$n$ הוא אי-זוגי. האם נובע מכך שטענת השאלה נכונה לכל המספרים הטבעיים? והרי היא אינה נכונה, למשל, עבור $n=2$, אז היכן בהוכחה בכל זאת השתמשנו באי-זוגיות של $n$?

הכללה המאפשרת הוכחה לא אינדוקטיבית: לכל $x$ ממשי (ואפילו מרוכב) ולכל $n$ אי-זוגי מתקיים:

$$x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

כאשר בסוגריים האחרונות מופיע סכום עם סימנים מתחלפים של חזקות של $x$, החזקות האי-זוגיות בסימן שלילי והזוגיות בסימן חיובי (בדקו את נכונות השוויון הזה). בהציבנו בתור $x$ מספר טבעי כלשהו (למשל $x=12$) נקבל (עבור $n$ אי-זוגי) כי $x^n+1$ הוא כפולה של $x+1$, כלומר מתחלק בו ללא שארית.
אגב, לכל $n$ טבעי (לאו דווקא אי-זוגי) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$
ולפיכך $x^n - 1$ מתחלק ב-$(x-1)$ לכל $n$ טבעי (למשל, $12^n - 1$ מתחלק ב-11 לכל $n$ טבעי).

**2.** א. הוכיחו: $\log(a+b)^2 - \log 4 \le \log a + \log b \le \sqrt{\log a^2 \cdot \log b^2}$**.**
ב. קבעו את תנאי השוויון לכל אחד משני אי השוויונים.

**פתרון:** א. נתחיל בהוכחת אי השוויון השמאלי:

$$\sqrt{\log a^2 \cdot b^2} = \sqrt{2\log a \cdot 2\log b} = 2\cdot\sqrt{\log a \cdot \log b} \le 2\cdot\frac{\log a + \log b}{2} = \log a + \log b$$

כאשר האי-שוויון (היחיד) בשורה הקודמת מתקבל מאי-שוויון הממוצעים (ממוצע גיאומטרי של מספרים (אי-שליליים) אינו עולה על הממוצע האריתמטי שלהם).

**2/-**

להוכחת האי-שוויון הימני נוח להתחיל את הטיפול באגף ימין שלו:

$$\log(a+b)^2 - \log 4 = 2\cdot\log(a+b) - 2\cdot\log 2 = 2\big(\log(a+b) - \log 2\big) = 2\cdot\log\frac{a+b}{2}$$

$$\geq\ 2\log\sqrt{a\cdot b} = \log(\sqrt{a\cdot b}\,)^2 =\ \log(a\cdot b) = \log a\ +\ \log b$$

כאשר אי-השוויון נובע שוב מאי-שוויון הממוצעים.

ב. שני האי-שוויונים נובעים באופן ישיר מאי-שוויון הממוצעים לאחר פישוט מתאים של הביטויים הנתונים (תוך שימוש בתכונות בסיסיות של פונקציית הלוגריתם). כידוע שוויון באי-שוויון הממוצעים מתקיים כאשר ורק כאשר המספרים המועמדים למיצוע שווים ביניהם. כמו כן, מספרים שהלוגריתמים שלהם (ביחס לאותו בסיס) שווים, הם שווים ביניהם (כי פונקציית הלוגריתם היא חד-חד-ערכית (מונוטונית עולה ממש) בתחום הגדרתה).

מסקנה: תנאי השוויון בכל אחד משני האי-שוויונים הנתונים הוא $a=b$ .

**3.** הוכיחו: $\sin(x)+cos(x)\geq 1$ לכל $0\leq x\leq\pi/2$ . עבור איזה ערכי $x$ בתחום הנתון קיים שוויון?

**פתרון:** בתחום הנתון, הן הסינוס והן והקוסינוס הם אי-שליליים ולפיכך אי-השוויון הנתון שקול לאי-השוויון המתקבל ממנו כאשר מעלים את שני אגפיו בריבוע, וכשנעשה כך נקבל:

$$\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2 = \sin^2(x)+\cos^2(x)\ +\ 2\sin(x)\cos(x) = 1+2\sin(x)\cos(x)\geq 1$$

כי, כאמור, $\sin(x)\geq 0$ ו- $\cos(x)\geq 0$ עבור $x\in[0,\pi/2]$ .

כפי שרואים מחישוב הריבוע והשוואתו ל-1, שוויון יתקיים אם ורק אם $\sin(x)\cos(x)=0$ וזה קורה אם ורק אם (לפחות) אחד הגורמים האלה הוא 0, כלומר כאשר $\sin(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=0$ (בתחום הנתון) או כאשר $\cos(x)=0\ \Leftrightarrow\ x=\pi/2$ (בתחום הנתון).

מסקנה: קבוצת ערכי $x$ בתחום הנתון שעבורם מושג שוויון היא $\{0,\ \pi/2\}$ .

**4.** בכיתה 20 תלמידים, 12 בנות ו-8 בנים.

א. כמה ועדות-כיתה שונות בנות 3 חברים ניתן לבחור?

ב. כמה מהועדות שבחלק א' מורכבות משתי בנות ובן אחד?

ג. אחד מחברי הועדה שנבחרה משמש יו"ר הועדה ואחד אחר סגן יו"ר. כמה ועדות כאלה ניתן לבחור בסעיף א, כאשר ועדות בעלות אותו הרכב חברים אך חלוקת תפקידים שונה נספרות כועדות שונות? כמה בסעיף ב?

ד. כמה ועדות שונות (כמו בחלק ג') שבהן הן היו"ר והן סגנו הן בנות?

**פתרון:** א. כל ועדה אינה אלא תת-קבוצה בגודל 3 מקבוצת 20 חברי הכיתה ומספרן של תת-הקבוצות האלה הוא

כידוע $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{6} = 3\cdot 19\cdot 20 = 1{,}140$

**3/-**

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

ב. יש $\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\cdot 10!} = \frac{11\cdot 12}{2} = 11\cdot 6 = 66$ אפשרויות לבחור את שתי הבנות לועדה ולכל אחת מאפשרויות אלה יש 8 אפשרויות לצרף להן אחד הבנים בכיתה, כך שבסך הכול אפשר לבחור $8\cdot\binom{12}{2} = 8\cdot 66 = 528$ ועדות שונות המורכבות משתי בנות ובן.

ג. כל ועדה בסעיף א' יוצרת $3\cdot 2 = 6$ ועדות שונות עם תפקודים שונים (מדוע?) ולכן מספר הועדות האלה גדול פי שישה ממספרן בסעיף א', כלומר המספר הוא $6\binom{20}{3} = 6\cdot 1{,}140 = 6{,}840$. מאותה סיבה מספר הועדות בהרכב שתי בנות ובן עם יו"ר וסגן-יו"ר מובחנים גדול פי שישה ממספר הועדות האלה שבהן שלושת חברי הועדה שווים במעמדם, כלומר המספר הוא $6\cdot 8\binom{12}{2} = 6\cdot 528 = 3{,}168$.

ד. לכל ועדה המורכבת משתי בנות ובן, יש שני תפקודים שונים לשתי הבנות, ולפיכך מספר הועדות השונות המבוקש בסעיף זה גדול פי שניים ממספר הועדות בסעיף ב', כלומר מספרן הוא $2\cdot 8\cdot\binom{12}{2} = 2\cdot 528 = 1{,}056$.

**5.** א. מצאו את שורשי היחידה מסדר 6, כלומר את ששת המספרים המרוכבים $z$ המקיימים את המשוואה (מהמעלה השישית) $z^6 = 1$ והציגו אותם כ- $a+ib$ עם $a$ ו- $b$ מספרים ממשיים מפורשים (לא כפונקציות של מספרים אחרים כמו בהצגה פולארית).
ב. חשבו את שטח המשושה שקדקודיו (במישור המרוכב) הם שורשי היחידה הנ"ל.
במקרה הצורך, אפשר להשתמש בערכים הבאים:

$$\sin(0^\circ)=\frac{\sqrt{0}}{2},\quad \sin\left(30^\circ\right)=\frac{\sqrt{1}}{2},\quad \sin\left(45^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\left(60^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(90^\circ\right)=\frac{\sqrt{4}}{2}$$

**פתרון:** א. $k = 0,1,2,\ldots \qquad 1 = e^{k\cdot 2\pi i} = \cos(k\cdot 2\pi) + i\sin(k\cdot 2\pi)$

$$z_k = 1^{1/6} = \cos(\frac{k}{6}2\pi)+i\sin(\frac{k}{6}2) = \cos(k\frac{\pi}{3})+i\sin(k\frac{\pi}{3})$$
$$= \cos(k\cdot 60^\circ)+i\sin(k\cdot 60^\circ) \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

שימו לב: כאשר $5 < k$ הערכים חוזרים על עצמם במחזוריות של 6 ולכן יש רק שישה שורשים שונים.
עבור $k=0$ מתקבל השורש הטריוויאלי $z_0 = 1$. להלן חמשת השורשים האחרים:

**4/-**

$$z_1 = \cos(60^\circ) + i\sin(60^\circ) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \cos(120^\circ) + i\sin(120^\circ) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \cos(180^\circ) + i\sin(180^\circ) = -1 + i\cdot 0 = -1 \qquad z_5 = \cos(240^\circ) + i\sin(240^\circ) = -(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$z_5 = \cos(300^\circ) + i\sin(300^\circ) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ודאו שאכן $\cos(60^\circ) = 1/2$ ושהסימנים (חיובי או שלילי) של סינוס וקוסינוס ברשימה לעיל הם נכונים.

ב. כל שורשי היחידה שמצאנו הם בעלי ערך מוחלט 1 כי $|z^6| = |z|^6 = 1 \quad \Leftarrow \quad |z| = 1$ ולפיכך כנקודות במישור המרוכב מפוזרים שורשים אלה על מעגל היחידה (מעגל בעל רדיוס באורך 1) סביב הראשית. כפי שמצאנו בסעיף א הפיזור על המעגל הוא אחיד כשנקודות סמוכות מרוחקות זו מזו מרחק קשתי של $60^\circ$ (אורך קשת $\pi/3$). מאחר שמיתרים הנשענים על קשתות שוות-אורך הם עצמם שווי-אורך, הרי שורשי היחידה (מסדר 6) מהווים קדקודים של משושה משוכלל החסום במעגל היחידה. כשמחברים את ששת הקדקודים למרכז המעגל (הראשית) מתחלק המשושה לשישה משולשים שווי-שוקיים חופפים בעלי שוקיים באורך 1 (רדיוס המעגל) ובעלי זווית ראש (במרכז המעגל) של 60 מעלות. לפיכך משולשים אלה הם לא רק שווי-שוקיים כי אם שווי כל שלוש הצלעות. כמובן, שטח המשושה $S$ הוא סכום שטחי ששת המשולשים ולפיכך $S = 6\Delta$ כאשר $\Delta$ מסמן שטח של משולש בודד. נותר לחשב את $\Delta$, שטח של משולש שווה-צלעות בעל צלעות באורך 1. בהסתמך על משפט פיתגורס, הגובה $h$ במשולש כזה ניתן על ידי $h = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$ ולפיכך $\Delta = 1\cdot\frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ושטח המשושה המבוקש הוא

$$S = 6\Delta = 6\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}56$$

**6.** לכל מספר שלם אי-שלילי $n$, נסמן ב- $n_5$ את השארית המתקבלת כאשר מחלקים את $n$ ב-5 (למשל, $0_5 = 0,\ 2_5 = 2,\ 35_5 = 0,\ 28_5 = 3$).

א. מהי קבוצת הערכים (הטווח) של הפונקציה $n \to n_5$ ?

ב. הוכיחו: $(m\cdot n)_5 = (m_5 \cdot n_5)_5 \qquad (m+n)_5 = (m_5 + n_5)_5$

ג. הוכיחו שלכל $a$ שאינו כפולה שלמה של 5 (זאת אומרת $a_5 \neq 0$) קיים $x$ יחיד בטווח של הפונקציה $n \to n_5$ שעבורו $(a\cdot x)_5 = 1_5 = 1$ ומצאו $x$ זה כאשר $a = 49$.

ד. האם הטענה שנדרשתם להוכיח בחלק ג' תישאר בתוקף אם במקום שאריות המתקבלות כאשר מחלקים ב-5 היינו "משחקים אותו משחק" עם שאריות המתקבלות מחילוק ב-10 ? הוכיחו תשובתכם.



●●● קריית האוניברסיטה, ת"ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

**פתרון:** א. ערכי הפונקציה $n \to n_5$ הם (על פי הגדרתה) השאריות שאפשר לקבל כאשר מחלקים מספר טבעי כלשהו ב-5 ולפיכך קבוצת הערכים המבוקשת היא $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. נוכל איפוא להציג מספר טבעי ככפולה שלימה (אולי כפולה ב-0) ועוד שארית שהיא לכל היותר 4: $n = 5q_n + n_5$ ( $q_n$ מספר טבעי אי-שלילי ו- $0 \le n_5 \le 4$ שלם).

ב. מאחר ששתי ההוכחות זהות במהותן, נסתפק כאן בהצגת ההוכחה לגבי פעולת הכפל. ובכן,

$$(m \cdot n)_5 = [(5q_m + m_5)(5q_n + n_5)]_5 = [5(5q_m q_n + q_m n_5 + q_n m_5) + m_5 \cdot n_5]_5 = 0_5 + (m_5 \cdot n_5)_5 =$$
$$= 0 + (m_5 \cdot n_5)_5 =$$
$$= (m_5 \cdot n_5)_5$$

בדקו היטב והצדיקו כל אחד משרשרת השוויונות האלה. הוכיחו את הטענה המקבילה לגבי החיבור.

ג. כפי שהוכחנו בסעיף ב', $(a \cdot x)_5 = (a_5 \cdot x_5)_5$ ומאחר ש- $a_5$ וה- $x$ שהוכחת קיומו (ויחידותו) מתבקשת הם בתמונה של הפונקציה $n \to n_5$, הרי כל אחד מהם הוא אחד מארבעת המספרים הטבעיים 1,2,3,4 (השארית 0 הוחרגה מהדיון כבר בנוסח השאלה). נתבונן לפיכך בלוח הכפל $\{(i \cdot j)_5 : i, j = 1, 2, 3, 4\}$ שאתם מתבקשים לאמת את נכונותו:

| | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **2** | 2 | 4 | 1 | 3 |
| **3** | 3 | 1 | 4 | 2 |
| **4** | 4 | 3 | 2 | 1 |

עיון בלוח הכפל מראה שכל שורה בו היא פרמוטציה (סידור) של המספרים 1,2,3,4 כלומר כל ארבעתם מופיעים (בהכרח פעם אחת) בכל שורה, וכך גם לגבי כל עמודה (מאחר שפעולת הכפל אדישה לסדר הגורמים, הטבלה היא סימטרית סביב האלכסון הראשי, זה המוביל מצפון-מערב לדרום-מזרח). לפיכך בהינתן מספר שורה $a$, יש מספר עמודה יחיד $x$ כך שבתא $(a, x)$ מצוי המספר 1, אבל הטבלה היא לוח כפל כך שבכל תא עומדת המכפלה של מספר השורה במספר העמודה, כלומר בהינתן $a$ הוכחנו קיומו של $x$ יחיד (שניהם בתחומים הרלוונטיים) כך ש- $(a \cdot x)_5 = 1$. $49_5 = 4$ ומאחר שלפי הטבלה $(4 \cdot 4)_5 = 16_5 = 1$, הרי $x = 4$ .

ד. הטענה לא תישאר בתוקף עבור שאריות המתקבלות מחילוק ב-10. למשל, כאשר $a = 5$ אין $x$ שעבורו $(a \cdot x)_{10} = (5 \cdot x)_{10} = 1$ כי כפולה שלימה של 5 מתחלקת תמיד ב-5 ולפעמים גם ב-10, אם היא מתחלקת ב-10 אז השארית שלה לאחר חילוק ב-10 היא 0 ואם היא מתחלקת רק ב-5 (אך לא ב-10) אז השארית שלה לגבי חילוק ב-10 היא 5, לעולם לא 1.
הכלל הוא: הטענה בסעיף ג' תישאר בתוקף כאשר 5 יוחלף במספר ראשוני כלשהו, והיא תופר כאשר המספר שיחליף את 5 יהיה פריק. לא נוכיח כאן את ההכללה המעניינת הזאת.