בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

פתרונות

מבחן סיווג במתמטיקה (26.10.2018)

1. חשבו את הביטוי המספרי (המרוכב) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})^{10}$ כלומר, הציגו אותו כמספר מרוכב $a+ib$ עם a,b מספרים ממשיים (מפורשים, כלומר לא בהצגה פולארית) .

פתרון: במבט ראשון ותמים עולה על הדעת לפתח את הבינום (דו-איבר) שבסוגריים לסכום של 11 מחוברים עם מקדמיהם הבינומיים המתאימים, אך עד מהרה מובילה גישה זו למבוי סתום, אלא אם כן מוכנים להשקיע מאמץ חישובי לא מבוטל נוסף. הצעד הראשון בגישה האחרת, שבה ננקוט כאן, הוא להעביר את הבינום שבסוגריים לצורתו הפולארית. לשם כך ניזכר כי $(\sqrt{3}/2)^2+(1/2)^2=1$ ומאחר ש- $1/2=\sin(30^\circ)=\sin(\pi/6)$, הרי $\sqrt{3}/2=\cos(30^\circ)=\cos(\pi/6)$, ומכאן

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})$$

היא ההצגה הפולארית של הבינום הנתון בצורתו האלגברית. נשתמש עתה במשפט דה-מואבר כדי לחשב את החזקה 10 של המספר המרוכב הנתון:

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})^{10}=[\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})]^{10}=\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3})=\cos(300^\circ)+i\sin(300^\circ)=$$

$$=cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})-i\sin(\frac{\pi}{3})=\cos(60^\circ)-i\sin(60^\circ)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. במשחק סודוקו יש לוח של 9 על 9 משבצות המחולק לשלוש גם באורך וגם ברוחב כך שנוצרים תשעה תתי ריבועים של 3 על 3. ממלאים את המשבצות במספרים בין 1 ל 9. אסור ששום ספרה תחזור פעמיים בשורה, בעמודה או בתוך אחד מתתי הריבועים של 3 על 3.
כמה צירופים מספריים אפשריים יש לאורך עמודה? וכמה לאורך האלכסון הראשי (זה שמתחיל שמאל למעלה ונגמר ימין למטה ואורכו 9)?

פתרון: בעמודה 9 משבצות ועלינו למקם בהן את תשעת המספרים $1,2,...,9$ מספר אחד בכל משבצת. יש 9 אפשרויות לבחור את המספר למשבצת הראשונה ולכל אחת מאלה נותרות 8 אפשרויות למספר שישוכן במשבצת השנייה, כך שיש $9\times 8=72$ צירופים למלא את שתי המשבצות הראשונות בעמודה, ולכל אחת מהן נותרו 7 אפשרויות למילוי המשבצת השלישית, וכך הלאה...

קריית האוניברסיטה, ת"ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

בסיום התהליך נמצא שמספר הצירופים הכולל למלא את 9 משבצות העמודה (עם מספרים שונים זה מזה במשבצות השונות) הוא $9\times8\times...\times2=9!=(9\cdot8\cdot7)\times6!=504\times720=362,880$.

בשונה מכללי הסודוקו לגבי העמודות (כמו גם השורות), על האלכסון לא חל האיסור שאותו מספר יופיע במשבצות שונות (אם הן לא שייכות לאותו תת-ריבוע אלכסוני), כך שמספר צירופי השיבוץ גדול בהרבה. אכן, בשלוש המשבצות האלכסוניות הראשונות, המהוות את האלכסון של תת-הריבוע העליון משמאל, ניתן לשבץ שלושה מספרים שונים שאותם ניתן לבחור ב- $\binom{9}{6}$ אופנים שונים, ולכל בחירה כזאת ניתן לסדרם בשלוש המשבצות ב- $3!=6$ אופנים שונים, כך שמספר הצירופים האפשריים הוא $504 = 9\times8\times7 = \frac{9!}{6!} = \binom{9}{6}\times3!$.

לכל אחד מ-504 הצירופים האלה יש $9\times8\times7=504$ צירופים לשלוש המשבצות האלכסוניות של תת-הריבוע המרכזי. בדומה, ובאופן בלתי תלוי בשיבוצים שנעשו בשני תת הריבועים הראשונים, גם לגבי אלה של תת-הריבוע התחתון מימין. בסך הכל מקבלים $(9\times8\times7)^3=504^3=128,024,064$ צירופים אפשריים לשיבוץ האלכסון במשחק סודוקו.

שימו לב להבדלים בסדרי הגודל: בעוד שמספר צירופי השיבוץ בעמודה הוא מסדר גודל של מאות אלפים, באלכסון הוא מסדר גודל של מאות מיליונים.

3. א. מצאו את קבוצת הפתרונות של אי השוויון $\left|1-\frac{|\log_x 4|}{1+|\log_x 4|}\right|\le\frac{1}{2}$

ב. עבור איזה ערכים של x מתקיים שוויון?

פתרון: א. ראשית, נשים לב שהביטוי בין סימני הערך המוחלט באגף שמאל הוא אי-שלילי (מדוע?) ולפיכך אי-השוויון הנתון שקול ל-:

$$1-\frac{|\log_x 4|}{1+|\log_x 4|}\le\frac{1}{2}$$

ואחרי הכפלת שני האגפים ב-$1+|\log_x 4|$ ופישוט אלגברי מתבקש, מתקבל אי-שוויון השקול לאי-השוויון הנתון בצורתו הפשוטה ביותר: $|\log_x 4|\ge1$.

קבוצת הפתרונות של אי שוויון זה (ולכן גם של אי-השוויון הנתון בשאלה) היא איחוד שתי הקבוצות (הזרות) הבאות:

$$\{x\in R:\log_x 4\ge1\}\cup\{x\in R:\log_x 4\le-1\}=\{x:\log_x 4\ge1\}\cup\{x:\log_x\frac{1}{4}\ge1\}=$$
$$=\{x:1<x\le4\}\cup\{x:1/4\le x<1\}$$

3/-

כלומר, איחוד הקטעים (הזרים) $[1/4,1)\cup(1,4]=[1/4,\ 4]-\{1\}$.

הסבר: $\log_x 4$ היא פונקציה יורדת של הבסיס x (ככל שהבסיס גדול יותר, מעריך החזקה אליה יש להעלותו כדי לקבל 4 הוא קטן יותר) ואילו $\log_x(1/4)$ היא פונקציה עולה של הבסיס בקטע $[1/4,1]$

הערה: מניחים כמובן שבסיס הלוגריתם x הוא מספר חיובי שונה מ-1.

ב. קבוצת הפתרונות הראשונה משיגה את החסם (התחתון) שלה 1 כאשר ורק כאשר $x=4$ ואילו הקבוצה השנייה משיגה את החסם (התחתון) שלה כאשר ורק כאשר $x=1/4$, וכמסקנה 4 ו-$1/4$ הם ערכי ה-x בהם מתקיים השוויון באי-השוויון הנתון.

4. א. הוכיחו שלכל x ממשי $\cos(x)+\sin(x)\le\sqrt{2}$

ב. עבור אילו ערכי x מתקיים שוויון?

פתרון: א. לגבי ערכי x שעבורם אגף שמאל שלילי אין מה להוכיח, לכן מותר להניח - וכך נעשה – שאגף שמאל הוא אי-שלילי ועבור ערכי x אלה נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל שאי-השוויון הנתון שקול ל-:

$$(\cos(x)+\sin(x))^2=\cos^2 x+\sin^2 x+2\cos(x)\sin(x)=1+\sin(2x)\le 2$$

המתנקז בסופו של דבר לאי השוויון הפשוט $\sin(2x)\le 1$ וזה תמיד מתקיים כי פונקציית הסינוס חסומה (מלמעלה) על ידי 1, מה שמוכיח את אי-השוויון הנתון .

ב. $\sin(2x)=1$ כאשר ורק כאשר

$$2x=90^\circ+2k\cdot 360^\circ=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (radians),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

כלומר, שוויון קיים כאשר ורק כאשר

$$x=45^\circ+k\cdot180^\circ=\frac{\pi}{4}+k\pi=(1+4k)\frac{\pi}{4}\ \ (radians),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

ראוי לשים לב שהמקסימום ($\sqrt{2}$) מתקבל בערכי x שבהם $\sin(x)=\cos(x)$ כך שלשני המחוברים תרומה שווה לערך המקסימאלי של הסכום.

5. נגדיר לצורך המבחן מערכת מספרים "סיווגיים" באופן הבא: מספר "סיווגי" יהיה זוג סדור של מספרים ממשיים $x=(a,b)$ ונגדיר את פעולת הכפל ביניהם (שנסמנה ב- $\circ$) בצורה הבאה

$$x\circ y=(a,b)\circ(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: במערכת המספרים הסיווגיים עם פעולת הכפל הזאת יש לכל מספר סיווגי שורש ריבועי כלומר, לכל מספר סיווגי x קיים מספר סיווגי y כך ש- $y^2=x$).

פתרון: אנו נדרשים לבדוק אם לכל זוג מספרים ממשיים $x=(a,b)$ קיים זוג של מספרים ממשיים (אולי יותר מאחד) $y=(c,d)$ שעבורו

$$y^2=(c,d)\circ(c,d)=(c^2-d^2,\ 2cd)=(a,b)=x$$

4/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

השוואת אברי הזוג המתאימים (בשוויון השלישי משמאל) מובילה לשתי המשוואות הבאות (בנעלמים c ו- d):

$$c^2 - d^2 = a \qquad 2cd = b$$

אם למשוואות אלה יש פתרון עם c ו- d ממשיים, אז הטענה הנבדקת היא נכונה.
לאחר ניסוי וטעיה (אולי אף תהיה) מתברר שנוח להפוך משוואות ריבועיות אלה למשוואות ליניאריות (מהמעלה הראשונה) בנעלמים c^2 ו- d^2:

$$(c^2 + d^2)^2 = (c^2 - d^2)^2 + 4c^2d^2 = a^2 + b^2$$

שימו לב שהאגף הימני של שוויונות אלה הוא תמיד אי-שלילי ולכן השורש שלו הוא מספר ממשי.
מכאן מתקבל (בצירוף המשוואה המקורית הראשונה):

$$c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad c^2 - d^2 = a$$

חיבור שתי משוואות אלה נותן
$$c^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

וחיסורן נותן
$$d^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

הביטויים באגף ימין הם מספרים ממשיים אי-שליליים (בעצם חיוביים ממש, אלא אם כן $a = b = 0$)
ולכן גם שורשיהם הריבועיים השווים ל- c ו- d בהתאמה הם מספרים ממשיים.
מסקנה: הטענה נמצאה נכונה והוכחה ככזאת.

הערה: אם נזהה את המספר הסיווגי $x = (a, b)$ עם המספר המרוכב $a + ib$, נגלה שפעולת הכפל $x \circ y$ בין שני מספרים סיווגיים אינה אלא פעולת כפל בין שני המספרים המרוכבים המזוהים איתם.
כפועל יוצא, מה שהוכחנו לעיל הוא שלכל מספר מרוכב יש שורש ריבועי (שאף הוא מספר מרוכב).

6. במישור המרוכב, נתון משולש החסום במעגל כלשהו סביב הראשית. קדקודי המשולש הנתון מיוצגים על ידי המספרים המרוכבים u, v, w. נתבונן במשולש שקדקודיו $u' = z \cdot u,\ v' = z \cdot v,\ w' = z \cdot w$ מתקבלים על ידי הכפלת הקדקודים הנתונים במספר המרוכב $z = \sqrt{2}(1+i)$. פי כמה שונה (גדול או קטן) שטח המשולש שקדקודיו (u', v', w') משטח המשולש המקורי בעל הקדקודים (u, v, w) ? דרושה תשובה מספרית.

5/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: נשים תחילה לב ש- $z=\sqrt{2}(1+i)=2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

לכן הקדקודים u',v',w' נמצאים על מעגל סביב הראשית בעל רדיוס גדול פי $|z|=2$ מרדיוס המעגל בו חסום המשולש המקורי והם מסובבים כלפי הקדקודים המקוריים u,v,w בזווית של 45° במגמה חיובית (נגדית למגמת השעון). לפיכך שטח העיגול החדש, הפרופורציוני לריבוע הרדיוס, גדול פי 4 וכך גם שטח כל מצולע החסום בעיגול החדש שהתקבל ממצולע חסום בעיגול המקורי על ידי הכפלת קדקודיו ב- z. כלומר, המשולש (u',v',w') הוא הגדלה פי 2 (ללא שינוי צורה. שני המשולשים הם 'דומים', בפרט – בעלי זוויות שוות בהתאמה) של המשולש המקורי (u,v,w) בתוספת שינוי האוריאנטציה שלו במישור. כאשר רדיוס המעגל גדל פי 2 גם כל המיתרים של המעגל גדלים פי 2, ולפי שצלעות של משולש החסום במעגל הם מיתרים של המעגל הרי שצלעות המשולש החדש גדולות בהתאמה פי 2 מצלעות המשולש המקורי (הנתון מלכתחילה). גם גובהי המשולש החדש הם כפולים בהתאמה מגובהי המשולש המקורי כי גובה במשולש הוא מכפלה של צלע בסינוס זווית המשולש שמול אותו גובה (בדקו) וזוויות המשולש החדש שוות בהתאמה לזוויות המשולש המקורי. מאחר ששטח של משולש פרופורציוני למכפלה של צלע בגובה שמעליה, הרי שטח המשולש החדש גדול פי $2\times2=4$ משטח המשולש המקורי.

.