School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות

למבחן סיווג במתמטיקה (02.08.2018)

1. בשלב הראשון (שלב הבתים) של מונדיאל הכדורגל משתתפות 32 נבחרות לאומיות (להלן – קבוצות) המתחלקות ל-8 בתים בני 4 קבוצות כל אחד. בכל בית, כל קבוצה משחקת (משחק אחד) נגד כל קבוצה באותו בית (אין בשלב זה משחקים בין קבוצות השייכות לבתים שונים). פי כמה היה משתנה (גדל או קטן) מספר המשחקים הכולל בשלב הראשון של המונדיאל אילו היו מחלקים את הקבוצות ל-4 בתים בני 8 קבוצות כל אחד, ובכל בית כל קבוצה הייתה משחקת (משחק אחד) נגד כל אחת מ-7 חברותיה לבית?

פתרון: מספר המשחקים בבית בן 4 קבוצות: $\binom{4}{2}=\dfrac{4\cdot3}{2}=6$ ולכן מספר המשחקים הכולל בשמונת הבתים הוא $8\cdot6=48$. לעומת זאת, בבית בן 8 קבוצות מספר המשחקים הוא $\binom{8}{2}=\dfrac{8\cdot7}{2}=28$ ולכן אם החלוקה הייתה ל-4 בתים בני 8 קבוצות, היו דרושים $4\cdot28=112$ משחקים ומספר המשחקים הכולל היה גדל פי $\dfrac{112}{48}=\dfrac{7}{3}>2$ שזה כאמור יותר מפי שניים.

כדאי גם לשים לב: $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}=1+2+\ldots+(n-1)$ ומשום כך ניתן לחשוב על המקדם הבינומי $\binom{n}{2}$ המונה את מספר המשחקים בבית בן n קבוצות גם באופן הבא: ניתן לקבוצות הבית את השמות $1,2,\ldots,n$. נפגיש תחילה את הקבוצה 1 נגד כ"א מ- $n-1$ חברותיה לבית וניתן לה לנוח לאחר שסיימה את תפקידה. נשארנו עם $n-1$ הקבוצות $2,3,\ldots,n$. בשלב זה ניתן לקבוצה 2 לשחק נגד כ"א מ- $(n-2)$ האחרות ונשלח גם אותה לנוח. נמשיך באופן זה עד שתישארנה שתי הקבוצות $(n-1)$ ו- n למשחק ביניהן המסיים את משחקי הבית. בדרך זו רואים בנקל שמספר המשחקים הכולל בבית בן n קבוצות הוא $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}=(n-1)+(n-2)+\ldots+1$.

2. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n, המספר n^4-n^2 מתחלק ב-12 ללא שארית. אפשר ללא שימוש באינדוקציה.

פתרון: מספר מתחלק ב-12 אם (ורק אם) הוא מתחלק הן ב-3 והן ב-4 וזה הדבר שנוכיח.
ההוכחה תסתמך (בין השאר) על העובדה שאחד מכל שלושה מספרים עוקבים מתחלק ב-3. ובכן:
$n^4-n^2=n^2(n^2-1)=n\cdot n(n-1)(n+1)$. נבחין בין שני מקרים: א) n זוגי: במקרה זה n^2 מתחלק ב-4 ואם n מתחלק גם ב-3, אז כך גם n^2 ולמספר הנתון יש גורם המתחלק ב- $3\cdot4=12$. אם n זוגי אך אינו מתחלק ב-3, אז אחד משני הגורמים $(n-1)$ או $(n+1)$ מתחלק ב-3 (כשניים משלושה מספרים עוקבים שלגבי השלישי התנאינו שאינו מתחלק ב-3).

ב) n אי-זוגי: במקרה זה שני הגורמים $(n-1)$ ו- $(n+1)$ הם זוגיים ולכן מכפלתם מתחלקת ב-4. כמו כן אחד משלושת המספרים העוקבים $(n-1),\ n,\ (n+1)$ מתחלק ב-3 ולפיכך מכפלת כל הגורמים מתחלקת ב-12.

לסיכום: הוכחנו שבין אם n הוא זוגי ובין אם הוא אי-זוגי, המספר n^4-n^2 מתחלק ב-12.

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

3. נתונה המשוואה $x^2-3y^2=1$ עבור מספרים שלמים y,x .

א. מצאו את שלושת הפתרונות (השלמים) האי-שליליים (x,y) בעלי ערכי y הקטנים ביותר.

ב. נגדיר סדרה (x_n,y_n) לפי החוקיות הבאה:

$$(x_0,y_0)=(1,0)$$
$$x_n=2x_{n-1}+3y_{n-1} \qquad y_n=x_{n-1}+2y_{n-1}$$

הוכיחו כי כל איבר (x_n,y_n) בסדרה הוא פתרון של המשוואה הנתונה.

פתרון: א. מהצבת $y=0,1,2,3,4$ מתקבל מידית ששלושת הפתרונות המבוקשים הם $(x,y)=(1,0),(2,1),(7,4)$ כי ערכי x המקיימים את המשוואה עבור $y=2,3$ אינם שלמים.

ב. נוכיח את הטענה באינדוקציה. בחלק א' של השאלה ראינו שהטענה תקפה עבור $n=0$. נניח תקפות הטענה עבור $n-1$ (עם $1\le n$ כלשהו) ונוכיח את תקפותה עבור המספר העוקב n. לשם כך נציב במשוואה את (x_n,y_n) באמצעות האיבר שלפניו בסדרה:

$$\begin{aligned} x_n^2-3y_n^2 &= (2x_{n-1}+3y_{n-1})^2-3(x_{n-1}+2y_{n-1})^2 = \\ &= (4x_{n-1}^2-3x_{n-1}^2)+(9y_{n-1}^2-3\cdot 4y_{n-1}^2)+(12x_{n-1}y_{n-1}-12x_{n-1}y_{n-1}) = \\ &= x_{n-1}^2-3y_{n-1}^2=1 \end{aligned}$$

השוויון הסופי ל-1 נובע מהנחת האינדוקציה.

4. א. הוכיחו שלכל $x,y\ge 2$ ממשיים:

$$\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2 y} \ \ge\ \frac{2}{\log_x 2+\log_y 2}$$

ב. עבור איזה ערכי (x,y) מתקיים שוויון?

פתרון: **א.** לאחר שנחלק ב-2 מונה ומכנה של אגף ימין, נפעיל על המכנה את אי-שוויון הממוצעים:

$$\frac{2}{\log_x 2+\log_y 2}=\frac{1}{\frac{\log_x 2+\log_y 2}{2}}\le\frac{1}{\sqrt{\log_x 2\cdot\log_y 2}}$$

(אי-שוויון הממוצעים מתהפך (לכאורה) כי $a\ge b \ \Leftrightarrow\ 1/a\le 1/b$, עבור $b,a>0$). לפיכך מספיק להוכיח:

$$\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2 y}\cdot\sqrt{\log_x 2\cdot\log_y 2}\ \ge 1$$

השקול ל:

$$\sqrt{\log_2 x\cdot\log_x 2}\cdot\sqrt{\log_2 y\cdot\log_y 2}\ge 1$$

אבל המכפלה של הלוגריתמים בכל אחד משני השורשים האחרונים שווה ל-1 לפי המתכון של החלפת בסיסי הלוגריתם (בדקו טענה זו). בכך הוכח אי השוויון המבוקש.

3/-

ב. המקום היחיד בו הופיע אי-שוויון בטיעון בחלק א' הוא כשהפעלנו את אי-שוויון הממוצעים ולכן התנאי לשוויון באי-שוויון שהוכחנו הוא תנאי השוויון באי-שוויון הממוצעים, שהוא כידוע השוויון של שני המספרים שאת ממוצעיהם (האריתמטי והגיאומטרי) מחשבים. כפועל יוצא, תנאי השוויון באי שוויון שהוכח בחלק א' הוא: $\log_x 2 = \log_y 2$ וזה קורה כאשר ורק כאשר $x = y$.

5. הוכיחו או הפריכו (באמצעות דוגמא נגדית קונקרטית ככל האפשר) את הטענה הבאה:
לכל שלוש קבוצות C, B, A מתקיים שוויון הקבוצות $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$.

פתרון: נסמן ב- L את הקבוצה שבאגף שמאל וב- R את זו שבאגף ימין. ננסה להוכיח כי $L = R$. שתי הקבוצות האלה בנויות ממכפלות קרטזיות של קבוצות אחרות, לכן אבריהן הן זוגות סדורים (x, y) עם $y \in C$ ו- x איבר בקבוצה נתונה הנקבעת על ידי הקבוצות B, A. ועכשיו לעצם ניסיון ההוכחה:

$$L =: (A\cap B)\times C = \{(x,y): x\in A\cap B, y\in C\} = \{(x,y): x\in A, y\in C\}\cap\{(x,y): x\in B, y\in C\}$$

$$= (A\times C)\cap(B\times C) =: R$$

בדקו שכל השוויונות האלה מבוססים על הגדרת הקבוצות המשתתפות והגדרת סימני הפעולות ביניהן.
מאחר שניסיון ההוכחה צלח, הטענה נמצאה נכונה.

6. א. הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית הבאה (לכל x ממשי): $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
תזכורת: $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
או לחלופין משפט דה-מואבר.
ב. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים x המקיימים את המשוואה

$$\cos(3x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = \frac{1}{8}$$

פתרון: א.

$$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) =$$
$$= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) =$$
$$= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) = \cos^3(x) - 3(1 - \cos^2(x))\cos(x) =$$
$$= 4cos^3(x) - 3\cos(x)$$

שימו לב שבחישובים השתמשנו בנוסחאות התזכורת ובמשפט פיתגורס בניסוחו הטריגונומטרי $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

4/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

ב. נשתמש בזהות שהוכחנו בחלק א' וכמו כן, שוב בניסוח הטריגונומטרי של משפט פיתגורס, ונקבל:

$$\cos(3x)+3\cos(x)\sin^2(x)=[4\cos^3(x)-3\cos(x)]+3\cos(x)(1-\cos^2(x))=\cos^3(x)$$

כך שהמשוואה הנתונה שקולה למשוואה $\cos^3(x)=1/8$. השורש השלישי הממשי היחיד של $1/8$ הוא $1/2$

ולכן קבוצת הפתרונות המבוקשת היא $\{x\in R:\cos(x)=\frac{1}{2}\}=\{\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi : n=0,\pm1,\pm2,\dots\}$

הדבר הוא כך כי הקוסינוס חיובי ברביע הראשון והרביעי על מעגל היחידה והוא שווה לחצי

ב- $\pm\frac{\pi}{3}$ רדיאנים = $\pm60^\circ$. שימו לב: סיבוב של 60 מעלות במגמה שלילית (עם כיוון השעון) מוביל לאותה נקודה כמו סיבוב של 300 מעלות במגמה חיובית (נגד כיוון השעון). ואלה שני הערכים היסודיים היחידים (בין 0 ל 2π כלומר בין 0 ל 360 מעלות) שהקוסינוס שלהם הוא חצי. כל הפתרונות האחרים נגזרים משניים אלה באמצעות המחזוריות של פונקציית הקוסינוס.

7. נתבונן במשוואה (מהמעלה השלישית) $z^3=1$ ונסמן ב- $z_0=1,\ z_1,\ z_2$ את פתרונותיה המרוכבים (מספרים אלה נקראים שורשי היחידה ממעלה (או מסדר) 3).

א. מצאו את ערכי z_1 ו- z_2.

ב. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו הן הנקודות z_2, z_1, z_0 במישור המרוכב.

פתרון: א.

$$z^3=1=e^{2\pi i}=cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$$
$$=e^{4\pi i}=\cos(4\pi)+i\sin(4\pi)$$

ולפיכך

$$z_1=(e^{2\pi i})^{1/3}=e^{\frac{2\pi}{3}i}=\cos(120^\circ)+i\sin(120^\circ)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2=(e^{4\pi i})^{1/3}=e^{\frac{4\pi}{3}i}=\cos(240^\circ)+i\sin(240^\circ)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

שימו לב: כידוע $\cos(60^\circ)=1/2$ (כי $\sin(30^\circ)=1/2$) ועל סמך נתון זה בלבד קל לקבל את ערכי סינוס וקוסינוס של 120 ו-240 מעלות כפי שהוצגו לעיל.

ב. (ערוך תרשים של המשולש במישור המרוכב). צלע המשולש שמול הקדקוד $z_0=1$ היא הקטע $\overline{z_1z_2}$

ואורכה $\sqrt{3}=|(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})|=|z_1-z_2|=a$ כמרחק בין קצותיה.

הקדקוד שמול צלע זו הוא $z_0=1$ ומרחקו (האנכי) h (אורך גובה המשולש) מהצלע שמולו הוא המרחק בין $z_0=1$ לבין המרכז $c=\frac{z_1+z_2}{2}=-\frac{1}{2}$ של הצלע, כלומר $h=|c-z_0|=|-\frac{1}{2}-1|=\frac{3}{2}$ ומכאן ששטח המשולש המבוקש הוא $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

5/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

גישה אלטרנטיבית: שורשי היחידה (לענייננו – מסדר 3) הם בעלי ערך מוחלט 1 ולכן הנקודות המתאימות להם במישור המרוכב נמצאות במרחק 1 מהראשית, כלומר על המעגל בעל רדיוס 1 (מעגל היחידה) סביב הראשית. הן מחלקות מעגל זה לשלוש קשתות שוות אורך, בנות 120 מעלות כ"א (ערוך תרשים מתאים) ולכן המשולש הנוצר הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל (צלעות המשולש נשענות על קשתות שוות אורך ולכן הן עצמו שוות באורכן).
כדאי לשים לב שכל המשולשים שווי הצלעות החסומים באותו מעגל הם חופפים (ולא כל שכן שווים בשטחם) באופן בלתי תלוי באוריאנטציה של קדקודי המשולש על פני המעגל. האוריאנטציה הנקבעת על ידי שורשי היחידה נוחה במיוחד לחישוב אורך הצלע והשטח של המשולש כי כפי שראינו בגישה הקודמת, באוריאנטציה זו, אחת הצלעות מקבילה לציר האנכי (הציר הדמיוני) והגובה לצלע זו נמצע על הציר האופקי (הממשי).
כשמחברים את קדקודי המשולש למרכז המעגל (לראשית), המשולש מתחלק לשלושה משולשים שווי-שוקיים חופפים, בעלי שוקיים באורך 1 (רדיוס המעגל) וזווית בת 120 מעלות ביניהן. כפועל יוצא, שטח המשולש המבוקש הוא

$$S = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(120^\circ) = 3\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

כפי שגם מצאנו בשיטה הקודמת.

.

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב