בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

פתרונות

למבחן סיווג במתמטיקה מיום 16.09.2018

1. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n, $3^{2^n}-1$ מתחלק ללא שארית ב- 2^{n+2}

פתרון: נוכיח את הטענה באינדוקציה. בדיקת תקפות הטענה עבור $n=1$ (בסיס האינדוקציה):

$$3^{2^1}-1=3^2-1=8=2^3=2^{1+2}$$

עתה נניח תקפות הטענה עבור n מספר טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה) ונוכיח אותה עבור המספר העוקב $n+1$:

$$3^{2^{n+1}}-1=3^{2^n\cdot 2}-1=(3^{2^n})^2-1=(3^{2^n}-1)(3^{2^n}+1)$$

נתבונן בכל אחד מהגורמים של הביטוי שהתקבל באגף ימין: הגורם הראשון מתחלק ב- 2^{n+2} לפי הנחת האינדוקציה ואילו הגורם השני הוא מספר זוגי (הסבירו מדוע) ולכן מתחלק ב-2. לפיכך מכפלת שני הגורמים מתחלקת ב- $2^{n+2}\cdot 2=2^{n+3}=2^{(n+1)+2}$ וזה מה שנדרשנו להוכיח.

2. נתון מספר טבעי בן 100 ספרות עשרוניות. הוכיחו: אם סכום ספרותיו של המספר אינו 450, אז יש ספרה (לפחות אחת מהספרות $0,1,2,...,9$) החוזרת על עצמה לפחות 11 פעמים בייצוג העשרוני של המספר.
לעזרתכם: $1+2+...+9=45$.

פתרון: למספר הנתון 100 מקומות, מהמקום של ספרת ה- 10^{99} עד המקום של ספרת היחידות 10^0. לכתיבת המספר, מציבים בכל מקום אחת מעשר הספרות $0,1,...,9$ (פרט לכך שהספרה המובילה של 10^{99} לא יכולה להיות 0). לא ייתכן שכל אחת מעשר הספרות תחזור על עצמה לכל היותר 10 פעמים ואחת מהן תופיע במספר בפחות מעשרה מקומות, כי אז המספר הכולל של הספרות יהיה לכל היותר 99 ($10\cdot 9+9\cdot 1=99<100$) בעוד שהמספר הנתון הוא בן 100 ספרות. לפיכך, הדרך היחידה שבה כל אחת מעשר הספרות תופיע במספר לכל היותר עשר פעמים היא שכל ספרה תחזור על עצמה עשר פעמים **בדיוק** (אתם מוזמנים לחשב כמה מספרים שונים כאלה יש). במקרה כזה, סכום הספרות של המספר הוא (שימו לב שהספרה 0 אינה תורמת לסכום)

$$10\cdot 0+10\cdot 1+10\cdot 2+...+10\cdot 9=10\cdot(0+1+2+...+9)=10\cdot 45=450$$

לעומת זאת, אם לא זה המקרה, אז חלק מהספרות חוזרות על עצמן לכל היותר עשר פעמים וחלקן יותר מעשר פעמים. לא ייתכן שכולן חוזרות על עצמן לכל היותר עשר פעמים כי אז או שמספר הספרות הכולל הוא פחות ממאה, או שאנחנו שוב במקרה שבו סכום הספרות הוא 450 שהוחרג מראש. לפיכך, אם סכום הספרות אינו 450, לפחות אחת מהן חייבת לחזור על עצמה יותר מעשר פעמים, כלומר לפחות 11 פעמים.
מבט חלופי על הבעיה: אפשר להסתכל על עשר הספרות $0,1,2,...,9$ כעל 10 תאים. כדי לקבוע מספר בן 100 ספרות יש לשכן כל אחד מ- 100 העצמים $10^{99},10^{98},10^{97},...,10^1,10^0$ באחד מעשרת התאים (10^{99} מנוע מלהשתכן בתא 0). לפי עקרון שובך היונים, לפחות אחד התאים יכיל לפחות 11 מהעצמים, אלא אם כן כל תא יכיל עשרה עצמים בדיוק שזה המקרה שהוחרג מראש בו סכום הספרות הוא 450.

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

3. א. הוכיחו את אי-השוויון $\sqrt{ab}+\sqrt{(1-a)(1-b)}\le 1$ לכל $0\le a,b\le 1$

ב. עבור איזה ערכים של b,a מתקיים שוויון?

פתרון: א. נפעיל את אי-שוויון הממוצעים (גיאומטרי ≥ אריתמטי) על כל אחד מהמחוברים באגף שמאל, ונקבל:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{(1-a)(1-b)} \le \frac{a+b}{2}+\frac{(1-a)+(1-b)}{2}=\frac{a+b+1-a+1-b}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ב. שוויון יתקבל במקרים בהם מתקיים שוויון בכל אחד מאי-שוויוני הממוצעים בהם השתמשנו, וזה כידוע קורה כאשר ורק כאשר שני המספרים המועמדים למיצוע שווים ביניהם. מסקנה: שוויון מתקיים באי-שוויון שהוכחנו בחלק א' אם ורק אם $a=b$.

4. הוכיחו: $\cos\frac{\pi}{8}=(1+\sqrt{2})\sin\frac{\pi}{8}$

תזכורת: א) $\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)$

ב) $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$ $\quad\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

פתרון: $\frac{\pi}{4}$ רדיאנים הם 45 מעלות וזהו גודלן של זוויות הבסיס במשולש ישר זווית שווה-שוקיים. לכן הסינוס והקוסינוס שלהם הוא היחס בין הצלע של ריבוע לבין האלכסון שלו, שהוא לפי משפט פיתגורס

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

לפיכך, תוך שימוש בתזכורת ב':

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\cos(2\cdot\frac{\pi}{8})=\cos(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8})=\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=[\cos^2-(1-\cos^2)](\frac{\pi}{8})=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8})=2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$$

לשם הקיצור נסמן: $\sin\frac{\pi}{8}=s,\quad \cos\frac{\pi}{8}=c$. עלינו להוכיח: $c=(1+\sqrt{2})s$ כלומר $\frac{c}{s}=1+\sqrt{2}$.

מהשוויון הראשון שקיבלנו לעיל (באגפי הקצה שלו) נובע כי $c^2=\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ ואילו מהשני מתקבל $s\cdot c=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

ומשני אלה מתקבל מה שנדרשנו להוכיח:

$$\frac{c^2}{s\cdot c}=\frac{c}{s}=\frac{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}+1$$

3/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

5. לפעמים אומרים על שני מספרים ממשיים שאחד מהם **מכסה** את השני. לא נתונה ההגדרה של מונח זה, אך נתונה תכונתו הבאה: לכל שני מספרים שלמים x ו-y , אם y מכסה את x , אז $x \le 2y$.

א. האם -3 מכסה את -4 ? נמקו תשובתכם.

ב. הוכיחו שלא קיים מספר שלם המכסה כל מספר ממשי אחר.

פתרון: א. המספר -3 (למרות היותו גדול מ- (-4)) אינו מכסה את -4, כי $2\cdot(-3) = -6$ אינו שווה-או-גדול מ- (-4) כי אם קטן (ממש) ממנו.

ב. נוכיח את הטענה בשיטת השלילה, כלומר נוכיח שמשלילת הטענה נובעת עובדה לא נכונה בעליל. ובכן, נניח (בשלילה) שקיים מספר שלם, נקרא לו N , המכסה כל מספר ממשי אחר. לפי התכונה הנתונה של יחס הכיסוי מתקיים $x \le 2N$ לכל x ממשי. אבל, $x = 2N+1$ אינו קטן-או-שווה ל- $2N$ כי אם גדול (ממש) ממנו, וזו כמובן סתירה המוכיחה ששלילת הטענה אינה תקפה ולפיכך הטענה עצמה (שלילת שלילתה) היא נכונה.

שימו לב: תקפות הטיעון על דרך השלילה מבוסס על העיקרון המקובל בלוגיקה, האומר: **לכל טענה, היא או שלילתה נכונה, אין אפשרות שלישית**. ראוי לדעת שיש מודלים של לוגיקה (לוגיקה אינטואיציוניסטית) השוללים עיקרון זה ובהם הוכחה בדרך השלילה היא פסולה.

6. א. הוכיחו: $\log_b a \cdot \log_a b = 1$ לכל b, a ממשיים חיוביים ושונים מ-1.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של המשוואה הלוגריתמית הבאה וחשבו את קבוצת הפתרונות שלה:

$$\log_{2x} 50 \cdot \log_{50} 3 \;=\; \frac{1}{\log_3(x^2+1)}$$

פתרון: א. נקרא ל- $\log_b a$ בשם x. עלינו להוכיח: $x \cdot \log_a b = 1$. על פי הגדרת פעולת (פונקציית) הלוגריתם כפעולה (כפונקציה) הפוכה לפעולת (לפונקציית) ההעלאה בחזקה, $b^x = a$. למספרים שווים, לוגריתמים שווים (ביחס לאותו בסיס, למשל a) ולכן $\log_a b^x = \log_a a = 1$, וכמו כן אגף שמאל של שוויון זה שווה ל- $x \cdot \log_a b$ (תכונה בסיסית של לוגריתם) כך שביטוי זה שווה אכן ל-1 כפי שנדרש להוכיח.

ב. אגף שמאל מוגדר היטב כאשר $0 < x$ ואגף ימין כאשר $x \ne 0$ כך שתחום ההגדרה של המשוואה הוא הקרן החיובית הפתוחה על הישר הממשי $(0,\infty)$.

נעביר את הלוגריתמים באגף שמאל של המשוואה לבסיס 3 ונקבל משוואה השקולה למשוואה הנתונה

$$\log_{2x} 50 \cdot \log_{50} 3 = \frac{\log_3 50}{\log_3 2x} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 50} = \frac{1}{\log_3 2x} = \frac{1}{\log_3(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \log_3 2x = \log_3(x^2+1) \;\Rightarrow\; 2x = x^2+1 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$$

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

.