School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון מבחן סיווג במתמטיקה (01.03.2024)

1. הוכיחו כי שארית החלוקה ב-3 של ריבוע של מספר טבעי שייכת לקבוצה $\{0,1\}$.

פתרון:

שארית החלוקה ב-k של מספר טבעי N מוגדרת להיות r, כאשר מתקיים: $N = m * k + r$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ וכן $r \in \{0,1, \dots N-1\}$. במקרה שלנו, ניתן לראות כי כל מספר טבעי ניתן להצגה ע"י $N = 3k + r, r \in \{0,1,2\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. נוכיח ע"י הפרדה למקרים לפי שארית החלוקה ב-3 של המספר הטבעי N:

עבור $r = 0$: מתקיים כי $N^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2 + 0$, כלומר שארית החלוקה של ריבוע מספר טבעי המתחלק ב-3 ללא שארית הינה 0.

עבור $r = 1$: מתקיים כי $N^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$, כלומר שארית החלוקה של ריבוע מספר טבעי המתחלק ב-3 עם שארית 1 הינה 1.

עבור $r = 2$: מתקיים כי $N^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1$, כלומר שארית החלוקה של ריבוע מספר טבעי המתחלק ב-3 עם שארית 2 הינה 1.

סה"כ, ניתן לראות כי שארית החלוקה ב-3 של הריבוע של מספר טבעי שייכת לקבוצה $\{0,1\}$.

2. א. פתרו את המשוואה הבאה: $2 = \left|\log_{\frac{1}{2}}|\mathrm{x}|\right| + |\log_2|\mathrm{x}||$.

ב. פתרו את המשוואה הבאה: $2 = \left|\log_{\frac{1}{2}}|\sin(\mathrm{x})|\right| + |\log_2|\sin(\mathrm{x})||$.

פתרון:

א. ראשית, נשים לב כי תחום ההגדרה הינו $|x| > 0$, כלומר $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
נשים לב כי מתקיים: $\log_{\frac{1}{2}}|\mathrm{x}| = -\log_2|\mathrm{x}|$. לכן, המשוואה בשאלה שקולה למשוואה:

$$|\log_2|\mathrm{x}|| + \left|\log_{\frac{1}{2}}|\mathrm{x}|\right| = 2 \to 2 * |\log_2|\mathrm{x}|| = 2 \to |\log_2|\mathrm{x}|| = 1$$

לכן, מתקיים: $\log_2|x| = 1 \vee \log_2|x| = -1 \to |x| = 2 \ \vee |x| = \frac{1}{2}$

ולאחר חיתוך עם תחום הגדרה: $x \in \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

ב. נשים לב שזו אותה משוואה למעשה מסעיף א'. לכן, תחום ההגדרה כאן יהיה:

$$\sin(x) \neq 0 \to x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

וכן, הפתרונות יהיו $\sin(x) \in \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$. כעת, מהגדרת ה-sin, נקבל כי למעשה מתקיים: $sin(x) \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ ולכן קבוצת הפתרונות (לאחר חיתוך עם תחום ההגדרה):

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. נגדיר את האובייקט קבוצה של קבוצות, כלומר קבוצה שכל איבריה הם אובייקטים מסוג קבוצה (למשל: $G=\{\{1,2,5\},\{5,3,e\},\{5,8,-2.3\}\}$).
נגדיר איחוד וחיתוך על קבוצה של קבוצות ע"י:

$$\cup G = \{x \mid \exists t \in G, x \in t\}$$
$$\cap G = \{x \mid \forall t \in G, x \in t\}$$

(בדוגמה למעלה, נקבל: $\cup G = \{1,2,5,3,e,8,-2.3\}$ וכן $\cap G = \{5\}$).

תהי B קבוצה של קבוצות, ותהי קבוצה A. הוכיחו כי מתקיים:

$$A \setminus \cap B = \cup \{A \setminus C \mid C \in B\}$$

פתרון:
נוכיח שוויון קבוצות ע"י הכלה דו כיוונית.

כיוון ראשון: יהי $x \in A \setminus \cap B$ צ"ל: $x \in \cup \{A \setminus C \mid C \in B\}$.

$$x \in A \setminus \cap B \to x \in A \wedge x \notin \cap B \to x \in A \wedge \exists C \in B : x \notin C \to \exists C \in B : x \in A \setminus C$$
$$\to x \in \cup \{A \setminus C \mid C \in B\}$$

כיוון שני: יהי $x \in \cup \{A \setminus C \mid C \in B\}$ צ"ל: $x \in A \setminus \cap B$.

$$x \in \cup \{A \setminus C \mid C \in B\} \to \exists C \in B : x \in A \setminus C \to : x \in A \wedge \exists C \in B : x \notin C \to$$
$$x \in A \wedge x \notin \cap B \to x \in A \setminus \cap B$$

הוכחנו הכלה דו כיוונית ולכן הקבוצות שוות.

4. נניח כי בכיתה יש n סטודנטים. על הכיתה לבחור k חברי ועד. בנוסף על חברי הועד מוטלת החובה לבחור m סטודנטים מתוכם שיהוו את הועד העליון. הניחו כי n, k, m טבעיים וכן מתקיים: $n \geq k \geq m \geq 0$.

א. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד עליון?

ב. הוכיחו אלגברית כי מתקיים: $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.

ג. הסבירו בצורה קומבינטורית מדוע השוויון מסעיף ב' מתקיים.

פתרון:

א. ראשית, לבחירת חברי הועד יש (ללא חשיבות לסדר וללא חזרות) $\binom{n}{k}$ בחירות אפשריות.

באותו אופן, לבחירת ועד עליון מתוכם יש (מאותן סיבות) $\binom{k}{m}$ בחירות אפשריות. לכן, לפי עקרון הכפל, סך הדרכים בהם ניתן לבחור ועד עליון: $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

ב. מתקיים:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\frac{k!}{m!\cdot(k-m)!} = \frac{n!}{m!\cdot(k-m)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n-m)!}{m!\cdot(k-m)!\cdot(n-k)!\cdot(n-m)!} =$$
$$= \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-m)!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

ג. אגף שמאל הוא למעשה בדיוק התיאור המדויק בשאלה: בחירה של k מתוך n עצמים (ללא חשיבות לסדר וללא חזרות), ומתוך k העצמים שנבחרו, יש לבחור m עצמים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר. אגף ימין של הבעיה, למעשה מתאר את אותן קבוצות בחירה רק בסדר שונה: ראשית, נבחר מתוך n עצמים m ללא חזרות וללא חשיבות לסדר, ומהשארית (n-m) נצטרך לבחור עוד (k-m) ללא חזרות וללא חשיבות לסדר, מה שישלים את מספר העצמים בקבוצה הגדולה. סך הכל, ב-2 המקים בוצעה בחירה של קבוצה "גדולה" (k) וקבוצה "קטנה" יותר מתוכה (m).

5. נתון המספר המרוכב $z \in \mathbb{C}$ הבא: $z = R \cdot \mathrm{cis}(\alpha)$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. ידוע כי: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. חשבו את ערכו של α.

ב. הוכיחו כי לכל שני מספרים מרוכבים $b, c \in \mathbb{C}$ מתקיים: $|bc| = |b||c|$.

ג. ידוע כי: $|4iz| - |i\bar{z}| + 2\,\mathrm{Re}\{\frac{z}{\bar{z}}\} = 8$. מצאו את ערכו של R.

ד. מצאו את כל ערכי $w \in \mathbb{C}$ המקיימים: $27w^6 = z^3$.

פתרון:

א. מתקיים: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot \mathrm{cis}(\frac{2\pi}{3})$ וכן: $\frac{z}{\bar{z}} = \mathrm{cis}(2\alpha)$ לכן: $\mathrm{cis}(2\alpha) = cis(\frac{2\pi}{3})$ כלומר מתקיים: $2\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \to \alpha = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. לכן, לפי התנאי שנתון עבור הערך של α, נקבל כי מתקיים: $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

ב. ראינו בכיתה כי ערך מוחלט של מספר מרוכב שווה לרדיוסו, לכן אם נסמן: $b = R_b\, cis(\theta_b)$ וכן $c = R_c\, cis(\theta_c)$ נקבל: $|bc| = |R_b R_c\, cis(\theta_b + \theta_c)| = R_b R_c = |b||c|$ כדרוש.
*ניתן גם להראות זאת בתצורה קרטזית, נשאיר זאת לקוראים.

ג. נעזר בטענה מסעיף ב' ובנתונים ונקבל את המשוואה: $4R - R + 2 * \left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \to R = 3$.

ד. מתקיים: $z^3 = (3cis(\frac{4\pi}{3}))^3 = 27\,\mathrm{cis}(4\pi) = 27$ לכן, נפתור: $27w^6 = 27$ כלומר המשוואה שיש לפתור: $w^6 = 1$. כעת, לפי דה-מואבר: $w_k = \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi k}{6}\right), k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ וסה"כ: $w_0 = 1, w_1 = \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), w_2 = \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right), w_3 = -1, w_4 = \mathrm{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right), w_5 = \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

6. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j} = \frac{2n}{n+1}$.

פתרון:

ניתן להוכיח באינדוקציה (נשאיר זאת לקוראים). נראה כאן דרך נוספת. ראשית, נשים לב כי המכנה של הביטוי, הוא למעשה סדרה חשבונית שהפרשה הוא 1 וכן האיבר הראשון 1. לכן, כפי שראינו בכיתה, מתקיים: $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$ לכן, יש להראות למעשה: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2n}{n+1}$.

נשים לב כי מתקיים: $\frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}$. לכן: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}$ ופתיחה של הסכום האחרון: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$. ניתן לראות כי כל האיברים האמצעיים מבטלים אחד את השני, ולמעשה אנחנו נותרים רק עם האיבר הראשון והאחרון. כלומר: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = 2 - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1)-2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$ כדרוש.