

School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler **הפקולטה למדעים מדויקים**
 Faculty of Exact Sciences **ע"ש ריימונד וברלי סאקלר**
 Tel Aviv University **אוניברסיטת תל אביב**

מבחן סיווג במתמטיקה (30.10.2020)
 נדחה מ-22.09.2020 עקב מגפת הקורונה

משך המבחן: שלוש שעות
 אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

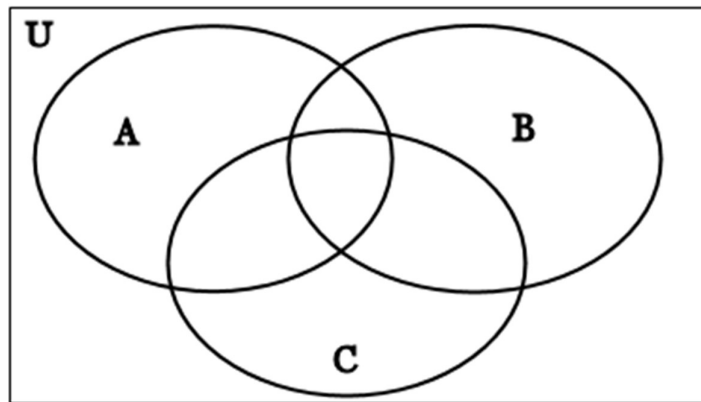
התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. תהיינה A, B, C קבוצות, שלשתן תת-קבוצות של קבוצה U . נגדיר את הקבוצות

$$D := ((A \cap B) \setminus C) \cup (C \setminus (A \cup B))$$

$$E := ((A \cup B)^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$$

- א. (8 נק') שרטטו 2 דיאגרמות-וון לקבוצות הנתונות וצבעו (אפשר בדיו או בעיפרון) באחת מהן את התחום המייצג את הקבוצה D ובאחרת את התחום של E .
 ב. (9 נק') הוכיחו פורמאלית, מבלי להיעזר בדיאגרמות, כי $D = E$.



2. נתונה המשוואה $\log_{64} x + \log_{64} x^2 + \dots + \log_{64} x^n = 1/12$. מצאו ביטוי ל- x כפונקציה של n ופשטו (צמצמו) אותו ככל הניתן.

3. ידועה העובדה שלכל מספר טבעי n , סכום n הקוביות הראשונות שווה לריבוע הסכום, כלומר

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

בעזרת עובדה זו, מצאו ביטוי סגור (כלומר, ללא סכום עם 3 נקודות, או הסימן Σ) כפונקציה של n לסכום

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n(n+1)$$



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

4. נתונות שלוש הקבוצות הבאות של מספרים מרוכבים z :

$$A = \{z : |z| = 1\} \quad B = \{z : |\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|\} \quad C = \{z : z - \bar{z} \in \mathbb{R}\}$$

- א. (9 נק') שרטטו במישור המרוכב (בשלוש דיאגרמות נפרדות) את הקבוצות הנתונות.
 ב. (8 נק') מצאו את הקבוצות $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$, $A \cap B \cap C$ והציגו כל אחת מהן במפורש תוך פירוט כל האיברים שבה.

5. א. (8 נק') הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2(\alpha/2)}{1 + \tan^2(\alpha/2)}$$

- ב. (9 נק') מצאו את כל המספרים הממשיים x בקטע $(-2\pi, 2\pi)$ שעבורם $\tan^2 x = 3$.
 תזכורת: $\cos(\pi/3) = 1/2$

6. מיתר של מעגל (הייקף/שפה של עיגול) הוא קטע המחבר שתי נקודות על המעגל. נתונות n נקודות על מעגל ומותחים את כל המיתרים בין זו לזו.

- א. (5 נק') מהו מספר המיתרים שנוצרו, כפונקציה של n ?
 ב. (12 נק') בניח שהנקודות נבחרו באופן שאף שלושה מהמיתרים אינם נחתכים באותה נקודה (לידיעה - אפשר להוכיח שלכל n בחירה כזאת אפשרית).
 מהו מספר כל נקודות החיתוך בין המיתרים שנוצרו (כפונקציה של n)?
 רמז: נתחו את המקרה $n = 4$ וזהו את הרלוונטיות שלו ל- n כללי.

ב ה צ ל ח ה