



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (23.07.2021)

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. תהיינה A, B, C קבוצות.

הוכיחו (פורמלית) או הפריכו (באמצעות דוגמה נגדית והסבר) את הטענות הבאות:

א. $A \subseteq B \cap C$ אם-ורק-אם $A \subseteq B$ וגם $A \subseteq C$ (10 נקודות)

ב. $A \subseteq B \cup C$ אם-ורק-אם $A \subseteq B$ או $A \subseteq C$ (7 נקודות)

שימו לב: בכל סעיף יש שתי טענות, טענת אם וטענת רק-אם. יש להוכיח או להפריך כל אחת מהטענות.

2. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_3(1 - \log_2 |\frac{x}{x-1}|)$ על הישר הממשי.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f ? (6 נקודות)

ב. זהו וכתבו במפורש את הקבוצה $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$ (6 נקודות)

ג. זהו את הקבוצה $B = \{|x-2| : x \in A\}$ וסמנו אותה על ציר המספרים הממשיים (5 נקודות)

3. א. הציגו בצורה פולארית את המספרים המרוכבים הבאים: $1 + \sqrt{3}i, 5 + 5i$

תזכורת: $\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{\pi}{2} = 1$ (6 נקודות)

ב. הציגו את המספר המרוכב $z = (1 + \sqrt{3}i)^6 (5 + 5i)^4$ בצורתו הקרטזית $z = x + iy$ (11 נקודות)

2/-



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler **הפקולטה למדעים מדויקים**
 Faculty of Exact Sciences **ע"ש ריימונד וברלי סאקלר**
 Tel Aviv University **אוניברסיטת תל אביב**

4. הוכיחו שהביטוי $3\sin^2(2x) + 4\cos^6(x) + 4\sin^6(x)$ הוא קבוע שאינו תלוי ב- x . מהו ערכו של קבוע זה?

5. א. הוכיחו שלכל מספר טבעי אי-זוגי n , המספר $n^3 - 25n$ מתחלק ב-24 (ללא שארית) (7 נקודות)

ב. יהיו a, b, c, d מספרים טבעיים אי-זוגיים. בהנחה שסכומם מתחלק ב-24 (ללא שארית) הוכיחו כי סכום קוביותיהם $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ מתחלק אף הוא ב-24, או הפריכו טענה זו באמצעות דוגמה נגדית (10 נקודות)

6. הילוך פשוט על המספרים השלמים הוא טיול שבו המטייל מבצע בכל צעד תזוזה בגודל 1 ימינה (+1) או שמאלה (-1) מהמקום שבו היה בצעד הקודם. נניח שהטיול מתחיל בנקודה 0 ונסמן ב- S_n את מקום המטייל אחרי n צעדים (שימו לב ש- $-n \leq S_n \leq n$). מסלול באורך n הוא הקו השבור המחבר (בזו אחר זו) את הנקודות $(0, 0), (1, S_1), (2, S_2), \dots, (n, S_n)$ במישור.

א. מהו מספרם הכולל של המסלולים באורך n ? (5 נקודות)

ב. מהו מספר המסלולים באורך n המסתיימים ב- $S_n = m$?

כפונקציה של m ו- n ($-n \leq m \leq n$)? (12 נקודות)

ב ה צ ל ח ה