



School of Mathematical Sciences בית הספר למדעי המתמטיקה
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (10.09.2021)

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. תהי f הפונקציה הריבועית הפשוטה $f(x) = x^2$ על הישר הממשי.

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים y, x ולכל $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad (10 \text{ נקודות})$$

וקבעו עבור אילו ערכי α יש שוויון לכל y, x ועבור אילו זוגות (x, y) - לכל α ?

ב. במערכת צירים במישור רשמו גרף של הפונקציה f (בקווים כלליים המשקפים את צורת

הגרף) והעבירו מיתר - קטע המחבר שתי נקודות כלשהן על הגרף. בעזרת התרשים תנו

אינטרפרטציה גיאומטרית לאי השוויון בסעיף א' (7 נקודות)

2. א. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים t המקיימים $|t-2| + |t-4| < 30$ (10 נקודות)

ב. הוכיחו: $\log_2(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 20) < 95$ (7 נקודות)

3. א. האם $\cos 15^\circ > \sin 15^\circ > 0$? הוכיחו את תשובתכם (8 נקודות)

ב. הוכיחו כי

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3} \quad (9 \text{ נקודות})$$

2/-



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler **הפקולטה למדעים מדויקים**
 Faculty of Exact Sciences **ע"ש ריימונד וברבלי סאקלר**
 Tel Aviv University **אוניברסיטת תל אביב**

4. סביב ישר נתון מפוזרות במישור $m+n$ נקודות, m מהן מצדו האחד ו- n מצדו השני, אף לא אחת מהנקודות על הישר עצמו ולשם בהירות התמונה נניח גם שאף שלוש מהנקודות אינן נמצאות על ישר אחד. מחברים את כל הנקודות זו לזו בקטעים ישרים.
- א. כמה מהקטעים חותכים את הישר הנתון? (5 נקודות)
- ב. כמה מהקטעים אינם חותכים את הישר הנתון? (5 נקודות)
- ג. הוכיחו כי $m \cdot n + \binom{m}{2} + \binom{n}{2} = \binom{m+n}{2}$ בשני אופנים: בחישוב אלגברי ובטיעון קומבינטורי.

5. א. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה $z^3 = (1+i)^6$ והציגו אותם הן בהצגה פולארית ($z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$) והן בהצגה קרטזית ($z = x + iy$) (10 נקודות)
- ב. חשבו את שטח המצולע שקדקודיו הם פתרונות המשוואה במישור המרוכב (7 נקודות)
6. א. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n , $3^{4n} - 2^{4n}$ מתחלק (ללא שארית) ב-65 (10 נקודות)
- ב. האם קיים n טבעי שעבורו הביטוי בסעיף א' מתחלק ב-130? הוכיחו תשובתכם (7 נק')

ב ה צ ל ח ה