



School of Mathematical Sciences בית הספר למדעי המתמטיקה
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברברי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (01.07.2022)

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. מצאו את כל המספרים הממשיים שעבורם מתקיימים האי-שוויונים הבאים:

א. $\log_{10} \sqrt{x} \leq \sqrt{\log_{10} x}$ (8 נקודות)

ב. $4^{x+1} + 10^{x+2} \geq 25^x$ (9 נקודות)

2. מצאו את כל המספרים הממשיים בקטע $[0, 2\pi]$ המקיימים את המשוואות

הטריגונומטריות הבאות: א. $\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ (9 נקודות)

ב. $8 \sin^5(x) - 22 \sin^3(x) + 5 \sin(x) = 0$ (8 נקודות)

לעזרתכם: $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

3. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $z^5 + z^3 = 2z$

4. א. הוכיחו שלכל n טבעי אי זוגי $4^n + 7^n$ מתחלק ב-11 ללא שארית (10 נקודות)

ב. האם קיים n טבעי עבורו הביטוי שבסעיף א' מתחלק ב-44 ללא שארית? נמקו. (7 נקודות)

5. הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x) = 2^{|x|} - 2^{-|x|}$.

א. הוכיחו ש- f היא פונקציה זוגית, כלומר כי לכל x , $f(-x) = f(x)$. (8 נקודות)

ב. מצאו את כל ערכי x שעבורם $f(x) \geq \frac{15}{4}$ (9 נקודות)

2/-



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

6. יהיו n, k מספרים טבעיים, $n \geq k \geq 2$.

בכיתה $n+2$ תלמידות ובתוכן גם דנה ורונית. ועד כיתה מורכב מ- k תלמידות.

א. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד כיתה הכוללת את דנה ורונית? (4 נקודות)

ב. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד כיתה הכוללת את דנה אבל לא כוללת את רונית? (4 נקודות)

ג. בכמה דרכים – ועד כיתה שאינן כוללת את דנה ולא את רונית? (4 נקודות)

ד. הוכיחו (אלגברית) את הזהות $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ והסבירו את הקשר בין

זהות זו לבין בחירת ועד הכיתה תחת האילוצים שבסעיפים הקודמים. (5 נקודות)

ב ה צ ל ח ה