



School of Mathematical Sciences בית הספר למדעי המתמטיקה
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

01.03.2024 מבחן סיווג במתמטיקה

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר

יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיטות

1. הוכיחו כי שארית החלוקה ב-3 של ריבוע של מספר טבעי שייכת לקבוצה $\{0,1\}$.

2. א. פתרו את המשוואה הבאה: $|\log_2|x|| + \left| \log_{\frac{1}{2}}|x| \right| = 2$

ב. פתרו את המשוואה הבאה: $|\log_2|\sin(x)|| + \left| \log_{\frac{1}{2}}|\sin(x)| \right| = 2$

3. נגדיר את האובייקט קבוצה של קבוצות, כלומר קבוצה שכל איבריה הם אובייקטים מסוג

קבוצה (למשל: $G = \{\{1,2,5\}, \{5,3, e\}, \{5,8, -2.3\}\}$).

נגדיר איחוד וחיתוך על קבוצה של קבוצות ע"י:

$$UG = \{x \mid \exists t \in G, x \in t\}$$

$$\cap G = \{x \mid \forall t \in G, x \in t\}$$

(בדוגמה למעלה, נקבל: $UG = \{1,2,5,3, e, 8, -2.3\}$ וכן $\cap G = \{5\}$).

תהי B קבוצה של קבוצות, ותהי קבוצה A. הוכיחו כי מתקיים:

$$A \cap B = \cup \{A \setminus C \mid C \in B\}$$

4. נניח כי בכיתה יש n סטודנטים. על הכיתה לבחור k חברי ועד. בנוסף על חברי הועד מוטלת

החובה לבחור m סטודנטים מתוכם שיהוו את הועד העליון. הניחו כי n, k, m, טבעיים וכן

$$n \geq k \geq m \geq 0$$

מתקיים: א. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד עליון?

ב. הוכיחו אלגברית כי מתקיים: $\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$

ג. הסבירו בצורה קומבינטורית מדוע השוויון מסעיף ב' מתקיים.



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

5. נתון המספר המרוכב $z \in \mathbb{C}$ הבא: $z = R \cdot \text{cis}(\alpha)$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. ידוע כי: $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

א. חשבו את ערכו של α .

ב. הוכיחו כי לכל שני מספרים מרוכבים $b, c \in \mathbb{C}$ מתקיים: $|bc| = |b||c|$.

ג. ידוע כי: $|4iz| - |i\bar{z}| + 2 \operatorname{Re}\left\{\frac{z}{\bar{z}}\right\} = 8$. מצאו את ערכו של R .

ד. מצאו את כל ערכי $w \in \mathbb{C}$ המקיימים: $27w^6 = z^3$.

6. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sum_{j=1}^k j} = \frac{2n}{n+1}$.