



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler **הפקולטה למדעים מדויקים**
 Faculty of Exact Sciences **ע"ש ריימונד וברלי סאקלר**
 Tel Aviv University **אוניברסיטת תל אביב**

מבחן סיווג במתמטיקה (24.05.2019)

משך המבחן: שלוש שעות
 אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

1. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים החיוביים x שעבורם מתקיים אי-השוויון

$$\log_4 x^2 + \log_x 16 < 5$$

2. הוכיחו: לכל מספר טבעי $1 \leq n$, תקפים אי-השוויונים

$$1 < \frac{1}{n^4} (2 + 4 + 6 + \dots + 2n)^2 \leq 4$$

וקבעו עבור אלו ערכי n מתקיים השוויון באי-השוויון הימני.

3. נתון $\cos x = 1/3$. א. חשבו את $\cos(2x)$ ואת $\cos(3x)$. ב. הוכיחו שלכל מספר טבעי $1 \leq n$,

$$\cos(nx) = a_n / 3^n \text{ עם } a_n \text{ מספר שלם (חיובי או שלילי) שאינו מתחלק ב-3.}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \text{ תזכורת לעזרתכם:}$$

4. לוחית זיהוי של מכונית מורכבת משתי אותיות לטיניות שונות זו מזו (מ-26 האותיות Z, \dots, B, A) וחמש ספרות

עשרוניות לאו דווקא שונות זו מזו (מ-10 הספרות $9, \dots, 2, 1, 0$).

א. לכמה מכוניות ניתן להכין לוחית זיהוי בשיטה זו?

ב. פי כמה ישתנה (יגדל או יקטן) מספר המכוניות בחלק א' אם יידרש בנוסף שהספרה הראשונה והאחרונה על פני הלוחית תהיינה שוות ואילו יתר שלוש הספרות תהיינה שונות זו מזו ושונות מהספרה הראשונה?

5. סדרת המספרים המרוכבים $\{z_n\}$ מוגדרת על ידי $z_0 = 0$ ולכל $0 \leq n$, $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 5$

א. הסתכלו על אברי הסדרה כעל נקודות במישור המרוכב ותארו את הפעולות הגיאומטריות (סיבוב, מתיחה או כיווץ, הזזה) המתבצעות במעבר מ- z_n ל- z_{n+1} . אם לדעתכם יש סיבוב במעבר, ציינו סביב איזו נקודה מתבצע הסיבוב,

באיזו זווית ובאיזו מגמה (עם או נגד כיוון השעון) ולגבי מתיחה וכיווץ ציינו את שיעורם. כנ"ל לגבי הזזה.

ב. חשבו את z_n כפונקציה של n .

6. פרמוטציה (תמורה) של קבוצה היא כידוע פונקציה חד-חד-ערכית של הקבוצה על עצמה. נתבונן בפרמוטציות של

הקבוצה $\{1, 2, 3\}$. בהינתן שתי פרמוטציות כאלה, π ו- σ , נסמן ב- $\sigma \circ \pi$ את ההרכבה שלהן, כלומר $\sigma \circ \pi$ היא

הפונקציה (שאף היא פרמוטציה) המוגדרת על ידי $(\sigma \circ \pi)(x) = \sigma(\pi(x))$ עבור $x = 1, 2, 3$. האם $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$

לכל זוג פרמוטציות? אם תשובתכם חיובית, הוכיחו אותה ואם לא – מצאו והציגו דוגמה נגדית לטענה.

ב ה צ ל ח ה



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב