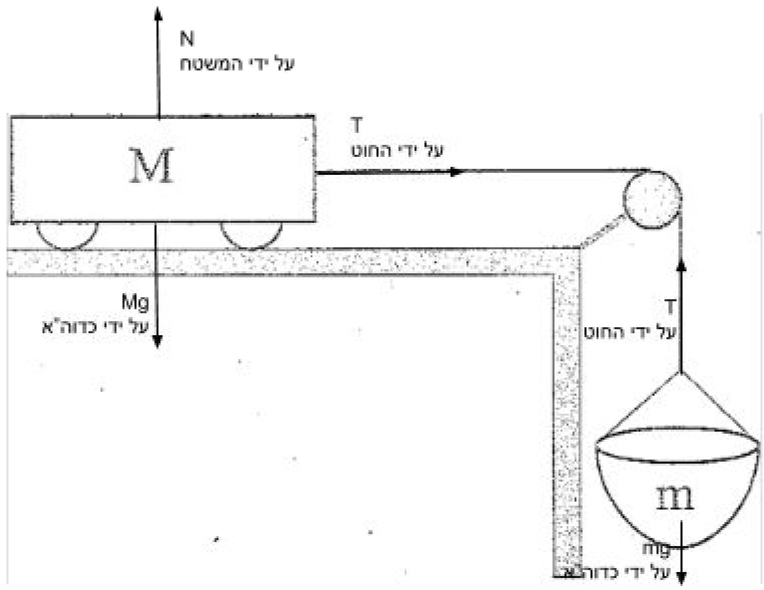
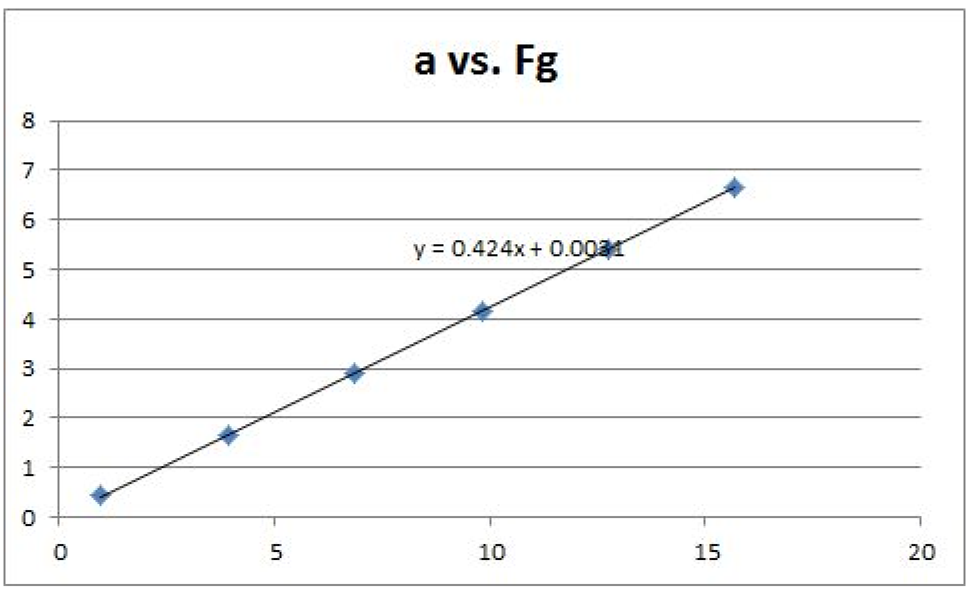
12)א.



ב.



הכוח הכולל שפועל על המערכת של שני הגופים הוא F_g, ולפי החוק השני $\Sigma F = m_{tot}a$.

$\Rightarrow F_g = (M_0 + m_0 + 6m_1)a \Rightarrow a = \frac{F_g}{M_0+m_0+6m_1}$

ג. נשתמש בשיפוע שהתקבל בגרף על מנת לחלץ את M_0:

$0.424 = \frac{1}{M_0+m_0+6m_1} \Rightarrow M_0 + m_0 + 6m_1 = \frac{1}{0.424} \Rightarrow M_0 = 0.458490566[kg] \approx 0.46\ [kg]$

ד. הפעם פועל כוח חיכוך על העגלה $f_s \le \mu_s N$. העגלה לא מאיצה בציר האנכי ולכן

$N = Mg = (M_0 + 5m_1)g$

נתייחס אם כך למערכת כאל גוף שפועל עליו כוח הכובד על הסל ימינה וכוח החיכוך על העגלה שמאלה, ואז נקבל כי הכוח הכולל הוא $F_g - f_s$. נדרוש שיתקיים $F_g - f_s = 0$:

$(m_0+m_1)g-(M_0+5m_1)g\cdot\mu_{s,min}=0 \Rightarrow \mu_{s,min}=\frac{m_0+m_1}{M_0+5m_1}=0.204238921\approx 0.20$

ה.מקדם החיכוך הקינטי הוא $\mu_k\approx 0.1$. נחשב את הכוחות הכוללים על המערכת:

$\Sigma F=mg-M\mu_k g=(m_0+n\cdot m_1)g-(M_0+(6-n)\cdot m_1)\mu_k g=m_{tot}a=(M_0+m_0+6m_1)a$

$\Rightarrow a=\frac{(m_0+n\cdot m_1)-(M_0+(6-n)\cdot m_1)\mu_k}{M_0+m_0+6m_1}\cdot g$

כאשר n מייצג את מספר המשקולות בסל. נציב $n=2-6$:

$n=2:\ a=\frac{(m_0+2\cdot m_1)-(M_0+4\cdot m_1)\mu_k}{M_0+m_0+6m_1}\cdot g=2.2217688[\frac{m}{s^2}]\approx 2.22[\frac{m}{s^2}]$

$n=3:\ a=\frac{(m_0+3\cdot m_1)-(M_0+3\cdot m_1)\mu_k}{M_0+m_0+6m_1}\cdot g=3.594384[\frac{m}{s^2}]\approx 3.59[\frac{m}{s^2}]$

$n=4:\ a=\frac{(m_0+4\cdot m_1)-(M_0+2\cdot m_1)\mu_k}{M_0+m_0+6m_1}\cdot g=4.9669992[\frac{m}{s^2}]\approx 4.97[\frac{m}{s^2}]$

$n=5:\ a=\frac{(m_0+5\cdot m_1)-(M_0+1\cdot m_1)\mu_k}{M_0+m_0+6m_1}\cdot g=6.3396144[\frac{m}{s^2}]\approx 6.34[\frac{m}{s^2}]$

$n=6:\ a=\frac{(m_0+6\cdot m_1)-(M_0+0\cdot m_1)\mu_k}{M_0+m_0+6m_1}\cdot g=7.7122296[\frac{m}{s^2}]\approx 7.71[\frac{m}{s^2}]$

13) על המכונית פועל כוח חיכוך קינטי בניגוד לכיוון תנועתה כשהיא בולמת. כוח החיכוך הקינטי שווה לכוח הנורמלי, N כפול מקדם החיכוך הקינטי. מכיוון שהתאוצה בכיוון האנכי שווה אפס, הכוח הכולל שווה גם הוא לאפס, כלומר: $N-mg=0\Rightarrow N=mg$, ולכן בכיוון האופקי פועל כוח:

$f_k=\ -\mu_k N=\ -\mu_k mg$

לפי החוק השני של ניוטון: $\vec{F}=m\vec{a}$, ולכן: $ma=\ -\mu_k mg\Rightarrow a=\ -\mu_k g$. נמיר את מהירות המכונית למטרים לשנייה:

$v=90\ [\frac{km}{h}]\cdot 1000[\frac{m}{km}]\cdot\frac{1}{3600}[\frac{h}{s}]=25\ [\frac{m}{s}]$

ראשית נחשב את זמני הבלימה:

$0=25-0.1\cdot 9.81\cdot t_{brake,ice}\Rightarrow t_{brake,ice}=25.48\ [sec]$

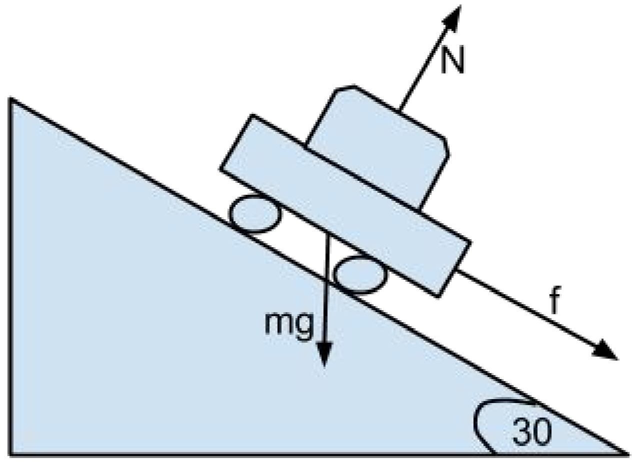
$0=25-0.8\cdot 9.81\cdot t_{brake,no\ ice}\Rightarrow t_{brake,no\ ice}=3.19\ [sec]$

כעת, נחשב את מרחקי הבלימה באמצעות $x=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$:

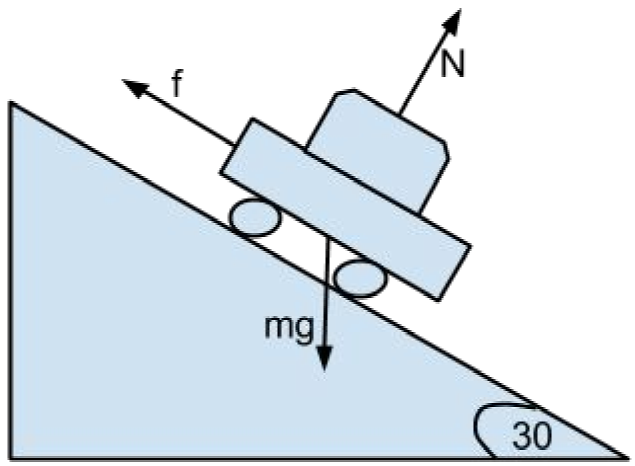
$\Delta x_{with\ ice}=25\cdot 25.48-0.1\cdot 9.81\cdot\frac{25.48^2}{2}=318.55\ [m]$

$\Delta x_{without\ ice}=25\cdot 3.19-0.8\cdot 9.81\cdot\frac{3.19^2}{2}=39.82\ [m]$

ב. נוסיף שרטוט של הכוחות הפועלים על המכונית קודם כל. עבור מכונית העולה במישור ובולמת:



עבור מכונית היורדת במישור ובולמת:



נחשב תחילה עבור מכונית שעולה במישור. אם נצמיד מערכת צירים למישור עצמו, ברור כי בציר הע הכוח הכולל צריך להתאפס, ולכן:

$N - mg \cdot cos(\frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow N = mg \cdot cos(\frac{\pi}{6})$

נאמר כי הכיוון החיובי של ציר הא הוא מעלה המישור, ואז כוח החיכוך שפועל בעת הבלימה יהיה:

$f = -\mu_k N = -\mu_k mgcos(\frac{\pi}{6})$

הכוח הכולל בציר הא יהיה $F_x = -mgsin(\frac{\pi}{6}) - \mu_k mgcos(\frac{\pi}{6}) = -mg(sin(\frac{\pi}{6}) + \mu_k cos(\frac{\pi}{6}))$. שוב נשתמש בחוק השני של ניוטון ונקבל כי התאוצה היא:

$a_{ascend} = -g(sin(\frac{\pi}{6}) + \mu_k cos(\frac{\pi}{6}))$

ראשית נחשב את זמני הבלימה:

$0 = 25 - 9.81 \cdot (\frac{1}{2} + 0.1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot t_{brake,ice} \Rightarrow t_{brake,ice} = 4.34\ [sec]$

$0 = 25 - 9.81 \cdot (\frac{1}{2} + 0.8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot t_{brake,no\ ice} \Rightarrow t_{brake,no\ ice} = 2.14\ [sec]$

כעת, נחשב את מרחקי הבלימה באמצעות $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$:

$\Delta x_{ascending,with\ ice} = 25 \cdot 4.34 - 9.81 \cdot (\frac{1}{2} + 0.1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{4.34^2}{2} = 54.30\ [m]$

$\Delta x_{ascending,without\ ice} = 25 \cdot 2.14 - 9.81 \cdot (\frac{1}{2} + 0.8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{2.14^2}{2} = 26.71\ [m]$

וכעת נחשב עבור מכונית היורדת במישור. הכוחות בציר y הם זהים, וכוח החיכוך בציר x פשוט משנה כיוון לקבלת:

$F_x = -mgsin(\frac{\pi}{6}) + \mu_k mgcos(\frac{\pi}{6}) = -mg(sin(\frac{\pi}{6}) - \mu_k cos(\frac{\pi}{6}))$

$\Rightarrow a_{descending} = -g(sin(\frac{\pi}{6}) - \mu_k cos(\frac{\pi}{6}))$

ראשית נחשב את זמני הבלימה, כשהפעם נזכור כי המהירות ההתחלתית שלילית:

$0 = -25 - 9.81 \cdot (\frac{1}{2} - 0.1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot t_{brake,ice} \Rightarrow t_{brake,ice} = -6.16\ [sec]$

שזו תשובה לא פיזיקלית. למעשה, המכונית לא תצליח לבלום בירידה עם קרח על הכביש.

$0 = -25 - 9.81 \cdot (\frac{1}{2} - 0.8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot t_{brake,no\ ice} \Rightarrow t_{brake,no\ ice} = 13.22\ [sec]$

כעת, נחשב את מרחק הבלימה באמצעות $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$:

$\Delta x_{ascending,without\ ice} = -25 \cdot 13.22 - 9.81 \cdot (\frac{1}{2} - 0.8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \frac{13.22^2}{2} = 495.62\ [m]$

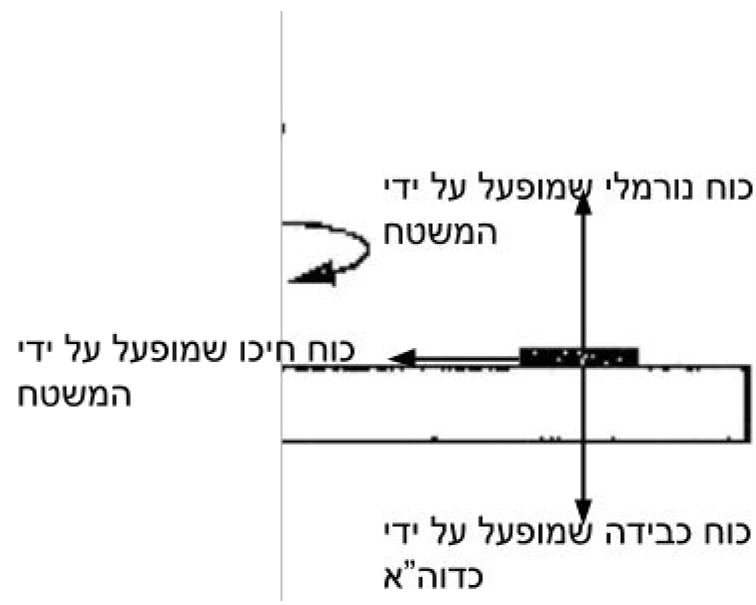
ג. הכוח השקול שפועל על המכונית הוא $800\ [N]$. תאוצת המכונית:

$a = \frac{800}{1000} = 0.8\ [\frac{m}{s^2}]$

ד. הסיבה שקיימת מהירות מקסימלית, היא שהתנגדות האוויר תלויה במהירות וגדלה איתה, עד לרגע שבו הכוח הכולל שווה לאפס, ואז אין תאוצה והמהירות נשארת קבועה וכך גם התנגדות האוויר ולכן גם הכוח הכולל. כך, נפסקת התאוצה והמכונית מגיעה למהירות מקסימלית.

הערה: ניתן להשתמש בשאלה זאת ה $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ כדי לחשב מרחקי בלימה.

14)א.



ב. על מנת להסתובב עם הדבקה, עליו להיות בתנועה מעגלית קצובה שתדירותה היא 90 סיבובים לשנייה. חיכוך סטטי מאופיין על ידי כך שחיכוך סטטי **מקסימלי** יהיה $\mu_s N$. אם כך,

נשתמש בכוח חיכוך מקסימלי בשביל המרחק המקסימלי מהמרכז. הכוח הכולל בציר הע יהיה אפס ולכן: $N = mg$.
בציר x לעומת זאת:

$$\sum F_x = f_s = \mu_s mg = ma \Rightarrow a = \mu_s g$$

על מנת שתתקיים תנועה מעגלית קצובה נדרוש: $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (2\pi f)^2 r = 4\pi^2 f^2 r$. התדירות בהרץ נמצא על ידי המרה לסיבובים בשנייה: $f = 90[\frac{rounds}{min}] \cdot \frac{1}{60}[\frac{min}{s}] = 1.5[\frac{rounds}{s}]$

$$\Rightarrow \mu_s g = 4\pi^2 f^2 R_{max} \Rightarrow R_{max} = \frac{0.6 \cdot 9.81}{4\pi^2 \cdot 1.5^2} = 0.066\ [m] = 6.6[cm]$$

ג.בגרף אנו רואים כוח חיכוך שעולה עד לערך מקסימלי, ואז צו נח לערך נמוך יותר ונשאר בו. זה מתאים לחיכוך סטטי שמגיע לערך מקסימלי, ואז הגוף מתחיל לנוע והחיכוך הופך להיות חיכוך קינטי שהוא קבוע. את כוח החיכוך הסטטי המקסימלי, הערך B, הראינו בסעיף הקודם וכעת נחשב:

$$B = f_{s,max} = \mu_s mg = 0.6 \cdot 0.005 \cdot 9.81 = 0.02943\ [N] \approx 0.029[N]$$

עבור התדירות שמתאימה, קל לראות כי זו התדירות מהסעיף הקודם (בסעיף הקודם דרשנו תדירות וכוח מקסימלי כדי למצוא מרחק, וכעת אנו דורשים את מרחק הזה והחיכוך המקסימלי לכן גם התדירות תהיה זהה).

$$A = 1.5^2 = 2.25\ [Hz^2]$$

ד. כן, ניתן למצוא את מקדם החיכוך הקינטי. כמו שראינו, מנקודה A ואילך פועל חיכוך קינטי המטבע מתחיל להחליק). חיכוך קינטי נתון על ידי הביטוי $f_k = \mu_k N$, ומצאנו כבר כי $N = mg$, ולכן:

$$f_k = 0.77B = 0.77 \cdot 0.02943 = 0.0226611 = \mu_k mg \Rightarrow \mu_k = 0.462 \approx 0.46$$

דרך קצרה בהרבה היא פשוט להכפיל את מקדם החיכוך הסטטי ב0.77.

ה. את כוח החיכוך הסטטי המקסימלי ואת כוח החיכוך הקינטי קל לחשב, שכן עדיין מתקיים $N = mg$:

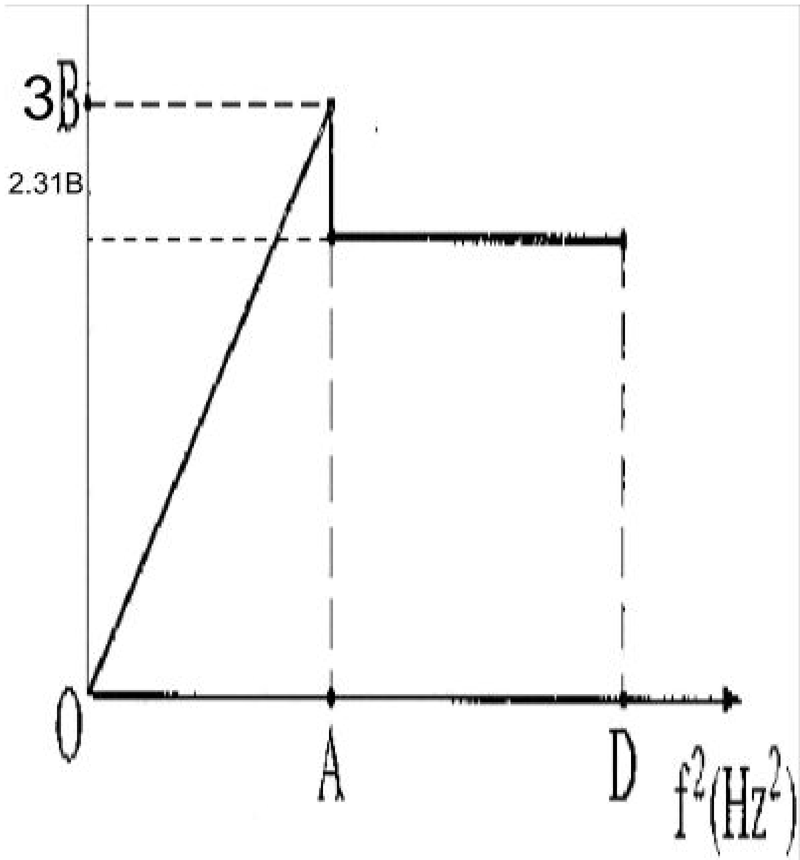
$$f_{s,max,new} = \mu_s m_{new} g = 3 \cdot f_{s,max,old} = 0.08829[N] \approx 0.088[N]$$

$$f_{k,new} = 3 \cdot f_{k,old} = 0.77 \cdot f_{s,max,new} = 0.0679833[N] \approx 0.068[N]$$

כעת נחשב את תדירות הסיבוב המקסימלית עבורה הגוף במנוחה ביחס לדסקה.

$$ma = f_{s,max,new} \Rightarrow a = \omega^2 r = 4\pi^2 f^2 r \Rightarrow 4\pi^2 f_{new}^2 R_{max} = \mu_s g \Rightarrow f_{new}^2 = \frac{\mu_s g}{4\pi^2 R_{max}} = f^2 = 2.25[Hz^2]$$

ואנו רואים כי אנו מקבלים את אותה התוצאה. בעצם נקבל גרף ש"נמתח" בציר האנכי פי 3:



15) א. בעצם יש לנו 5 זריקות אופקיות בזוויות שונות. הדרך שבה נבדוק עבור כל תותח אם הוא הצליח לפגוע: נקבע את המיקום ממנו התחילה הזריקה האופקית (המיקום של קצה התותח). לאחר מכן, נבדוק עבור המרחק בין המיקום ההתחלתי לדופן הפריגטה מה הגובה בו נמצא כדור התותח. אם גובה הוא שלילי, זה אומר שכדור התותח פגע במים שלפני הפריגטה (התוצאה שתצא לא מייצגת את מה שקורה בפועל שכן מהרגע שהכדור במים פועלים עליו עוד כוחות, אבל זה לא משנה כי העיקר שפספס את הפריגטה). אם הגובה הוא $0-15\ [m]$ זה אומר שכדור התותח פגע בדופן של הפריגטה. אם יוצא ערך שגדול מ$15\ [m]$, נבדוק עבור המרחק בין תחילת הזריקה החופשית לדופן ה<u>רחוקה</u> של הפריגטה מה הגובה בו נמצא כדור התותח. אם הגובה גדול מ$15[m]$ זה אומר שהכדור פספס ופגע במים אחרי הפריגטה. אם הגובה קטן או שווה ל $15[m]$, כדור התותח פגע בסיפון. נתחיל לפי הסדר.

נגדיר את המיקום שבו מתחילים כל התותחים כ$x=0$ ואת פני הים כ$y=0$.

<u>תותח 1:</u>

המיקום ההתחלתי: $(0+2.5cos3^{\circ},6+2.5sin3^{\circ})=(2.496573837,6.130839891)$.

המהירות ההתחלתית: $(443.8\cdot cos3^{\circ},443.8\cdot sin3^{\circ})=(443.1917875,23.22669738)$.

הציר הא התנועה היא במהירות קבועה ולכן:

$$x_{left} = 2750 = x_0 + vt = 2.496573837 + 443.1917875t \Rightarrow t_{left} = \frac{2750-2.496573837}{443.1917875} = 6.199355457\ [s]$$

בציר הע פועל רק כוח הכובד: mg אבל לפי החוק השני של ניוטון $F = ma$, ולכן $a = g$ כלפי מטה. וזה נכון לכל מסה. זו תנועה בתאוצה קבועה, ולכן:

$$y_{left} = y_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} = 6.130839891 + 23.22669738t_{left} - \frac{gt_{left}^2}{2} = \ -38.39\ [m]$$

כלומר, הכדור פגע במים לפני הפריגטה.

<u>תותח 2:</u>

המיקום ההתחלתי: $(0 + 2.5cos4^\circ, 6 + 2.5sin4^\circ) = (2.493910126, 6.174391184)$.

המהירות ההתחלתית: $(443.8 \cdot cos4^\circ, 443.8 \cdot sin4^\circ) = (442.7189255, 30.95792305)$.

הציר הא התנועה היא במהירות קבועה ולכן:

$$x_{left} = 2750 = x_0 + vt = 2.493910126 + 442.7189255t \Rightarrow t_{left} = \frac{2750-2.493910126}{442.7189255} = 6.20598292[s]$$

בציר הע פועל רק כוח הכובד: mg אבל לפי החוק השני של ניוטון $F = ma$, ולכן $a = g$ כלפי מטה. וזה נכון לכל מסה. זו תנועה בתאוצה קבועה, ולכן:

$$y_{left} = y_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} = 6.174391184 + 30.95792305t_{left} - \frac{gt_{left}^2}{2} = 9.386464144\ [m]$$

כלומר, הכדור פגע בדופן הקרוב של הפריגטה (+9 פאונד).

<u>תותח 3:</u>

המיקום ההתחלתי: $(0 + 2.5cos4.5^\circ, 6 + 2.5sin4.5^\circ) = (2.492293334, 6.196147739)$.

המהירות ההתחלתית: $(443.8 \cdot cos4.5^\circ, 443.8 \cdot sin4.5^\circ) = (442.4319127, 34.82014668)$.

הציר הא התנועה היא במהירות קבועה ולכן:

$$x_{left} = 2750 = x_0 + vt = 2.492293334 + 442.4319127t \Rightarrow t_{left} = \frac{2750-2.492293334}{442.4319127} = 6.210012496\ [s]$$

בציר הע פועל רק כוח הכובד: mg אבל לפי החוק השני של ניוטון $F = ma$, ולכן $a = g$ כלפי מטה. וזה נכון לכל מסה. זו תנועה בתאוצה קבועה, ולכן:

$$y_{left} = y_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} = 6.196147739 + 34.82014668t_{left} - \frac{gt_{left}^2}{2} = 33.27202194\ [m]$$

נחשב עבור הדופן הרחוקה יותר:

$$x_{right} = 2760 = x_0 + vt = 2.492293334 + 442.4319127t \Rightarrow t_{right} = \frac{2760-2.492293334}{442.4319127} = 6.232614844\ [s]$$

בציר הע פועל רק כוח הכובד: mg אבל לפי החוק השני של ניוטון $F = ma$, ולכן $a = g$ כלפי מטה. וזה נכון לכל מסה. זו תנועה בתאוצה קבועה, ולכן:

$$y_{left} = y_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} = 6.196147739 + 34.82014668t_{left} - \frac{gt_{left}^2}{2} = 32.67959317\ [m] \approx 32.68\ [m]$$

כלומר, הכדור פספס את הפריגטה.

שני התותחים הנותרים כוונו גבוה יותר ולכן פספסו בוודאות.

רק כדור אחד במשקל 9 פאונד יכול לפגוע בפריגטה, ולכן המלחים לא כיוונו כמו שצריך והפריגטה לא יכולה להיות מנוטרלת.

ב. רק כדור התותח מהתותח השני מאיים על הפריגטה, ולכן רק תותח הלייזר שמולו יפעל.

הלייזר נורה לאחר שנייה והפגיעה התרחשה לאחר שנייה נוספת.

ראשית נראה לאן הגיע כדור התותח הרלוונטי לאחר שתי שניות:

$x_{1sec} = 2.493910126 + 442.7189255 \cdot 2 = 887.9317611\ [m]$

$y_{1sec} = 6.196147739 + 34.82014668 \cdot 2 - \frac{g \cdot 2^2}{2} = 56.216441099\ [m]$

$\vec{r}_{cannonball} = (887.9317611, 56.216441099)$

מכאן אם נשתמש ב $t' = t - 1 = 1$, אזי נקבל כי ה"מיקום" של הטיל (אשר נע במהירות קבועה והיא c, בזווית θ):

$\vec{r}_{missle} = (2750 - c \cdot cos\theta \cdot 1, 6 + c \cdot sin\theta \cdot 1) = (2750 - c \cdot cos\theta, 6 + c \cdot sin\theta)$

$2750 - c \cdot cos\theta = 887.9317611 \Rightarrow c \cdot cos\theta = 1862.068239$

$6 + c \cdot sin\theta = 56.216441099 \Rightarrow c \cdot sin\theta = 50.216441099$

נחלק ביניהם:

$tan\theta = 0.026968083 \Rightarrow \theta = 1.54478292^\circ \approx 1.54^\circ$

ומהירותם:

$c = \frac{50.216441099}{sin1.54^\circ} = 1862.746353\ [\frac{m}{s}] \approx 1862.75\ [\frac{m}{s}] \approx 6705.90\ [\frac{km}{h}]$

16) א. $\vec{F} = (-\frac{dU}{dx}, -\frac{dU}{dy})$:

$\vec{F}_1 = (-6x + 8, -4y^3);\ \ \vec{F}_2 = (-3, -4);\ \ \vec{F}_3 = (y^2 - y, 2xy - x);\ \ \vec{F}_4 = (2, 0)$

ב. $dW = \vec{F}_{tot} \cdot d\vec{r}$ ואז $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \cdot dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y \cdot dy$. נתחיל עם המסלול העקום:

$$W_1 = \int_{-4}^{0} (-6x + 8)dx - \int_{4}^{0} 4y^3 dy = [-3x^2 + 8x]_{-4}^{0} - [y^4]_{4}^{0} = [-0 + 0 + 3 \cdot 16 - 8 \cdot (-4)] - [0 - 256] = 336$$

$$W_2 = \int_{-4}^{0} -3dx - \int_{4}^{0} 4dy = [-3x]_{-4}^{0} - [4y]_{4}^{0} = [-0 + 3 \cdot (-4)] - [0 - 16] = 4$$

$$W_3 = \int_{-4}^{0} (y^2 - y)dx + \int_{4}^{0} (2xy - x)dy$$

הפעם נציב $y = x^2,\ x = \sqrt{y}$:

$$W_3 = \int_{-4}^{0} (x^4 - x^2)dx + \int_{4}^{0} (2y^{\frac{3}{2}} - \sqrt{y})dy = [\tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^3}{3}]_{-4}^{0} + [\tfrac{4}{5}y^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}]_{4}^{0}$$

$$W_3 = [0 - 0 - \tfrac{(-1024)}{5} + \tfrac{(-64)}{3}] + [0 - 0 - \tfrac{4}{5} \cdot 32 + \tfrac{2}{3} \cdot 8] = 204.8 - 21\tfrac{1}{3} - 25.6 + 5\tfrac{1}{3} = 163.20$$

$$W_4 = \int_{-4}^{0} 2dx + \int_{4}^{0} 0dy = [2x]_{-4}^{0} = [0 - 8] = -8$$

קל לראות כי חוץ מאשר בW_3 , המסלול לא השפיע על התוצאה. הכוחות $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_4$ הם משמרים והעבודה שלהם לא תלויה במסלול. לעומת זאת, העבודה של $\vec{F}_3$ כן תלויה.
נחשב אותה כעת עבור המסלול הבא, על גבי הישר:

$$W_3 = \int_{-4}^{0}(y^2 - y)dx + \int_{4}^{0}(2xy - x)dy$$

הפעם נציב $y = -4x,\ x = -\frac{1}{4}y$:

$$W_3 = \int_{-4}^{0}(16x^2 + 4x)dx + \int_{4}^{0}(-\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}y)dy = [\tfrac{16x^3}{3} - 2x^2]_{-4}^{0} + [-\tfrac{y^3}{6} + \tfrac{y^2}{8}]_4^0$$

$$W_3 = [0 - 0 - \tfrac{16\cdot(-64)}{3} + 32] + [0 - 0 + \tfrac{64}{6} - 8] = 341\tfrac{1}{3} + 32 + 10\tfrac{2}{3} - 8 = 376$$

ובמסלול האחרון שמחולק ל2:

$$W_{3a} = \int_{-4}^{-4}(y^2 - y)dx + \int_{4}^{0}(2xy - x)dy \Rightarrow x = -4 \Rightarrow 0 + \int_{4}^{0}(-8y + 4)dy = [-4y^2 + 4y]_4^0 = 0 + 0 + 64 - 16$$

$$W_{3a} = 48$$

$$W_{3b} = \int_{-4}^{0}(y^2 - y)dx + \int_{0}^{0}(2xy - x)dy \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow W_{3,tot} = 48 + 0 = 48$$

17) א. גם בשאלה זאת יש שימור אנרגיה. נמצא את המהירות של הכדור בנקודה B

$$mg(h + H) + \tfrac{mv_0^2}{2} = mgH + \tfrac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B^2 = 2gh + v_0^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

כאשר כיוון המהירות ככיוון המסילה בנקודה זו, אופקי. מכאן בעצם יש לנו זריקה אופקית:
בציר הy מהירות התחלתית 0 ותאוצה g כלפי מטה, בציר הx מהירות התחלתית מה שמצאנו ותאוצה אפס. נבדוק כמה זמן ייקח לכדור להגיע לגובה 0:

$$0 = H - \tfrac{gt^2}{2} \Rightarrow t_{imp} = \sqrt{\tfrac{2H}{g}}$$

כעת נבדוק מה המרחק האופקי שהוא עובר בזמן זה:

$$x = v_B \cdot t_{imp} = \sqrt{2gh + v_0^2} \cdot \sqrt{\tfrac{2H}{g}} = \sqrt{4hH + \tfrac{2Hv_0^2}{g}}$$

נעלה בריבוע ונקבל:

$$x^2 = 4Hh + \tfrac{2Hv_0^2}{g}$$

ב. כעת, חמושים במה שמצאנו בסעיף הקודם, נוכל לחשב בקלות את גובה השולחן: שיפוע הגרף הנתון הוא $4H$:

$$4H = \tfrac{6-1}{1-0} = 5 \Rightarrow H = 1.25\ [m]$$

ג. גם כאן נשתמש בביטוי שמצאנו. נשתמש באיבר החופשי שלו, $\frac{2Hv_0^2}{g}$. אם מציבים $h = 0$, אז מקבלים את האיבר החופשי. בגרף הנתון רואים ש $x^2(h = 0) = 1$:

$$1 = \tfrac{2Hv_0^2}{g} = \tfrac{2.5v_0^2}{g} \Rightarrow v_0^2 = \tfrac{g}{2.5} \Rightarrow v_0 = 1.980908882\ [\tfrac{m}{s}] \approx 1.98\ [\tfrac{m}{s}]$$

ד.כעת ידועים לנו המהירות ההתחלתית, הגבהים, והמרחק האופקי הרלוונטי. נחשב את מהירות הכדור בנקודה B, ונבדוק אם בהגיעו למרחק $1.5[m]$ הוא מתנגש בכדור מעל הקרקע:

$$v_B = \sqrt{2gh + v_0^2} = \sqrt{2g \cdot 0.5 + 3.924} = \sqrt{13.734} = 3.705941176\ [\tfrac{m}{s}] \approx 3.71\ [\tfrac{m}{s}]$$

גם פה יש זריקה אופקית. נמצא תוך כמה זמן הכדור עובר מרחק אופקי של $1.5[m]$

$$1.5 = 3.705941176 \cdot t_{imp} \Rightarrow t_{imp} = 0.40475548\ [s] \approx 0.40\ [s]$$

נבדוק אם הכדורים עדיין באוויר בשלב זה (בציר האנכי לשני הכדורים אותם תנאים בדיוק: גובה התחלתי זהה, מהירות התחלתית 0 ותאוצה g כלפי מטה. לכן עד הפגיעה בקרקע הגובה של שניהם זהה ומספיק לבדוק אם אחד מהם עדיין באוויר כדי לדעת אם הם התנגשו לפני שפגעו בקרקע):

$$y_{imp} = H - \tfrac{g}{2} \cdot t_{imp}^2 = 0.446428571[m]\ \approx 0.45\ [m]$$

אכן הכדורים התנגשו באוויר, בגובה $0.45[m]$ ולאחר $0.40\ [s]$.

ה. המהירות בנקודה B לא משתנה. כך או כך, אם הכדור נעצר אזי כל האנרגיה הקינטית שלו הומרה לאנרגיית חום:

$$\Delta Q = \ -\Delta E_k = \ -W_f = \tfrac{mv_B^2}{2} = \tfrac{m}{2} \cdot (2gh + v_0^2)$$

זו העבודה שמבצע כוח החיכוך אם הכדור נעצר בדיוק בקצה. עבודה מוגדרת להיות $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, ובמקרה הזה:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg \Rightarrow -W_f = x \cdot \mu_k mg = \tfrac{m}{2} \cdot (2gh + v_0^2)$$
$$\mu_k = \tfrac{1}{1.5 \cdot 2g} \cdot (2gh + \tfrac{g}{2.5}) = \tfrac{2}{3}h + \tfrac{2}{15}$$

18) א. הכוחות היחידים שפועלים על המזחלת (כבידה, נורמלי) הם משמרים, לכן האנרגיה המכנית הכוללת נשמרת:

$$mgh_A = mgh_B + \tfrac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B^2 = 2g(h_A - h_B) \Rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot 5} = \sqrt{98.1} = 9.904544412[\tfrac{m}{s}] \approx 9.90[\tfrac{m}{s}]$$

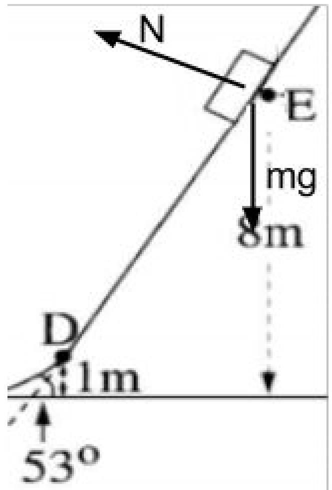
ב. להיות "חסר משקל" אומר שהכוח הנורמלי שפועל על המזחלת הוא אפס. במקטע העקום הזה המזחלת נוסעת על גבי מעגל. בתנועה מעגלית קצובה מתקיים $a = \tfrac{v^2}{r}$, אם כוח הכובד יהיה שווה $\tfrac{mv^2}{r}$ אז לא יפעל על הגוף כוח נורמלי (נתון שהמזחלת לא מתנתקת מהמסילה).

$$mg = \tfrac{mv^2}{r} \Rightarrow g = \tfrac{v_C^2}{5} \Rightarrow v_C = \sqrt{5g} = \sqrt{49.05} = 7.003570518\ [\tfrac{m}{s}] \approx 7.00\ [\tfrac{m}{s}]$$

בנוסף, גם בסעיף זה אין איבוד אנרגיה ולכן:

$$mgh_A = mgh_C + \tfrac{mv_C^2}{2} \Rightarrow 12g = h_C g + \tfrac{1}{2} \cdot 5g \Rightarrow h_C = 12 - 2.5 = 9.5\ [m]$$

ג. נשרטט את הכוחות שפועלים על הגוף:



כדי שהמזחלת תישאר צמודה למסילה (וגיל צמוד למזחלת), סך הכוחות בציר המאונך לה צריך להתאפס, כלומר צריך להתקיים:

$N - mgcos53^\circ = 0 \Rightarrow N = 65 \cdot 9.81 \cdot cos53^\circ = 383.7473495\ [N] \approx 383.75\ [N]$

וזה מה שמורים המאזניים בנקודה E.

ד. נשתמש במשפט עבודה אנרגיה. בעצם העבודה שנעשית על ידי הכוח הכולל כאן, $-mgsin53^\circ - f_k$, שווה להפרש באנרגיות הקינטיות. האנרגיה הקינטית בנקודה E היא אפס (כי המזחלת נעצרת). עד לנקודה D מתקיים שימור אנרגיה, לכן נחשב מה המהירות של המזחלת כשהיא מגיעה לD:

$mgh_A = mgh_D + \frac{mv_D^2}{2} \Rightarrow v_D^2 = 2g(h_A - h_D) \Rightarrow v_D = \sqrt{2 \cdot g \cdot 11} = \sqrt{215.82} = 14.69081346[\frac{m}{s}] \approx 14.69[\frac{m}{s}]$

ולכן ההפרש בין האנרגיות הקינטיות:

$\Delta E_k = 0 - \frac{mv_D^2}{2} = \ -10791 = W = \vec{F}_{tot} \cdot \Delta\vec{r}$

את המרחק שהוא עבר נחשב באמצעות טריגונומטריה. $\Delta\vec{r} = \frac{7}{sin53^\circ} = 8.764949607$

$-(mgsin53^\circ + f_k) \cdot 8.764949607 = \ -10791 \Rightarrow f_k = 1231.153684 - 100 \cdot 9.81 \cdot sin53^\circ$

$\Rightarrow f_k = 447.6922488\ [N] \approx 447.69\ [N]$

ה. עבור מקדם חיכוך מינימלי ניעזר בביטוי לכוח חיכוך סטטי מקסימלי:

$f_{s,max} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot mgcos53^\circ$ כאשר את המעבר האחרון הראינו בסעיף ג'.על מנת שהמזחלת לא תנוע לאחר שנעצרה התאוצה שלה צריכה להיות 0, כלומר הכוח הכולל צריך להתאפס:

$\mu_s \cdot mgcos53^\circ - mgsin53^\circ = 0 \Rightarrow \mu_{s,min} = tan53^\circ = 1.327044822 \approx 1.33$

19) א. בין הנקודה A לנקודה B האנרגיה נשמרת:

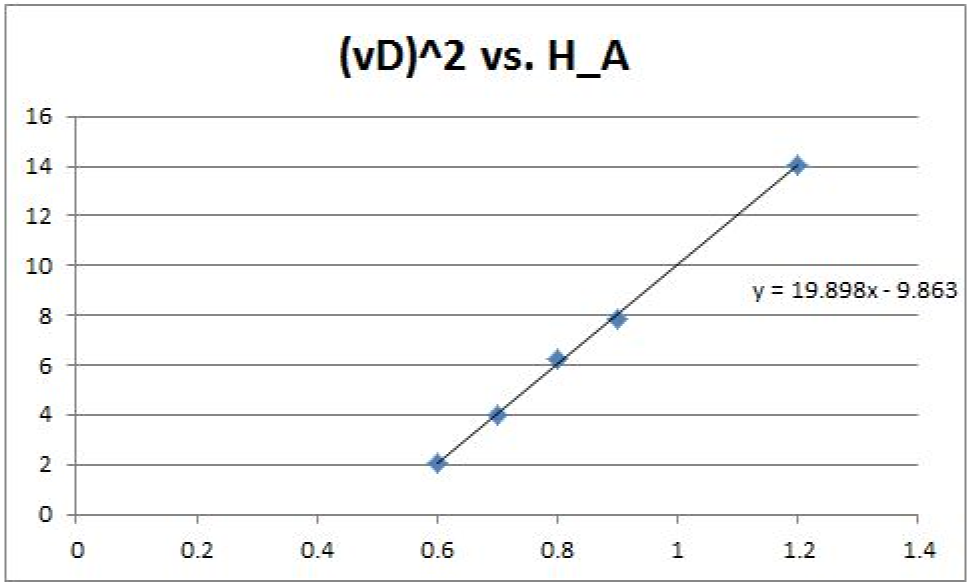
$mgH_A = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH_A}$

כעת, בקטע המחוספס יש איבוד אנרגיה. עבודת כוח החיכוך: $W_f = \ -f_k \cdot l_{BC} = \Delta E_k$.

$f_k = \mu_k N = \mu_k mg \Rightarrow \ -\mu_k mg \cdot l_{BC} = \frac{m}{2} \cdot (v_D^2 - v_B^2) = \frac{m}{2}(v_D^2 - 2gH_A)$

$\Rightarrow v_D^2 = 2g(H_A - \mu_k \cdot l_{BC}) \Rightarrow v_D = \sqrt{2g(H_A - \mu_k \cdot l_{BC})}$

ב. כעת ניעזר בטבלה לשרטוט הגרף:



השיפוע אמור לצאת $2g$, והאיבר החופשי $-2g \cdot \mu_k \cdot l_{BC}$. נחלק ביניהם לדיוק טוב יותר:

$\mu_k \cdot l_{BC} = \frac{9.863}{19.898} = 0.495677957\ [m] \approx 0.5\ [m]$

בגובה המינימלי הוא יגיע לנקודה D עם מהירות אפס:

$0 = \sqrt{2g(H_A - \mu_k \cdot l_{BC})} \Rightarrow H_A = \mu_k \cdot l_{BC} = \frac{9.863}{19.898} = 0.495677957\ [m] \approx 0.5\ [m]$

ג. נחשב את האנרגיות המכניות הכוללות בשתי הנקודות A וD וההפרש ביניהן יהיה עבודת כוח החיכוך.

$E_A = mgH_A = 0.2 \cdot 9.81 \cdot 1.1 = 2.1582\ [J] \approx 2.16\ [J]$

בשביל נקודה D, נוציא מהגרף מה אמורה להיות המהירות שם עבור גובה זה. יוצא $v_D = 3.467679339\ [\frac{m}{s}] \approx 3.47\ [\frac{m}{s}]$. כעת נחשב את האנרגיה המכנית הכוללת שם:

$E_D = mgh_D + \frac{mv_D^2}{2} = 1.79108\ [J] \approx 1.79\ [J]$

$W_f = E_D - E_A = -0.36712[J] \approx -0.37\ [J]$

ד.

$l_{BC} = \frac{0.495677957}{0.4} = 1.239194894\ [m] \approx 1.24\ [m]$

ה. מהטבלה המהירות בנקודה D במקרה זה היא $2.5\ [\frac{m}{s}]$. בציר האופקי מנקודה D ואילך זו תנועה במהירות קבועה של $v_D cos\theta$, ובציר האנכי תנועה עם תאוצה $-g$ ומהירות התחלתית של $v_D sin\theta$. מהנתון אנו יודעים כי המרחק האופקי שעבר הגוף הוא $5 \cdot 0.16 = 0.8\ [m]$. והגובה שלו יהיה $0.1\ [m]$

$0.8 = 2.5cos\theta \cdot t \Rightarrow t_{imp} = \frac{0.32}{cos\theta}$

$0.1 = 0.3 + 2.5sin\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow 0.3 = 0.3 + 2.5sin\theta \cdot \frac{0.32}{cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot (\frac{0.32}{cos\theta})^2$

$0 = 2.5sin\theta \cdot \frac{0.32}{cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot (\frac{0.32}{cos\theta})^2 \Rightarrow 0 = 0.8sin\theta cos\theta - 0.502272$

נציב $sin\theta cos\theta = 0.5 sin 2\theta$

$\Rightarrow sin(2\theta) = 0.62784 \Rightarrow \theta = 19.44547042^{\circ} \approx 19.45^{\circ} \approx 0.11\pi\ [rad]$