28) א. מתרחשת התנגשות אלסטית, כלומר נשמר התנע ונשמרת האנרגיה. נתונים: מסת בארי והמכונית $m_{bar+car} = 170\ [kg]$, מסת אוליבר והמכונית $m_{ollie+car} = 280\ [kg]$. המהירות של בארי לפני ההתנגשות היא $v_b = 20\ [\frac{km}{h}] = 20[\frac{km}{h}] \cdot 1000\ [\frac{m}{km}] \cdot \frac{1}{3600}\ [\frac{h}{s}] = 5\frac{5}{9}[\frac{m}{s}]$. לאחר ההתנגשות מהירותו היא: $u_b = 15\ [\frac{km}{h}] = 4\frac{1}{6}[\frac{m}{s}]$. שימור התנע:

$$170 \cdot 5\tfrac{5}{9} + 280 v_{ollie} = 170 \cdot 4\tfrac{1}{6} + 280 u_{ollie} \Rightarrow u_{ollie} = v_{ollie} + \tfrac{425}{504}$$

שימור אנרגיה:

$$0.5 \cdot 170 \cdot (5\tfrac{5}{9})^2 + 0.5 \cdot 280 \cdot v_{ollie}^2 = 0.5 \cdot 170 \cdot (4\tfrac{1}{6})^2 + 0.5 \cdot 280 \cdot u_{ollie}^2$$

$$170 \cdot (5\tfrac{5}{9})^2 + 280 \cdot v_{ollie}^2 = 170 \cdot (4\tfrac{1}{6})^2 + 280 \cdot (v_{ollie} + \tfrac{425}{504})^2 \Rightarrow v_{ollie} = 4.439484127\ [\tfrac{m}{s}] \approx 4.44\ [\tfrac{m}{s}]$$

והמהירות של אוליבר לאחר ההתנגשות:

$$\Rightarrow u_{ollie} = v_{ollie} + \tfrac{425}{504} = 5.282738095\ [\tfrac{m}{s}] \approx 5.28\ [\tfrac{m}{s}]$$

ב. אנו יודעים מהנתון שפליסיטי נוסעת במהירות שהייתה לאוליבר לפני ההתנגשות הראשונה. ונתון שהמהירות שלה עולה ב10 קמ"ש. בנוסף, אוליבר הגיע אליה במהירות שבה יצא מההתנגשות הקודמת ולאחר מכן המהירות שלו יורדת ב5 קמ"ש:

$$v_{felic} = v_{ollie} = 4.439484127\ [\tfrac{m}{s}];\ u_{felic} = v_{fellic} + \tfrac{10}{3.6} = 7.217261905\ [\tfrac{m}{s}]$$

$$v_{ollie\,2} = u_{ollie} = 5.282738095\ [\tfrac{m}{s}];\ u_{ollie\,2} = v_{ollie\,2} - \tfrac{5}{3.6} = 3.893849206\ [\tfrac{m}{s}]$$

נשתמש במשוואה של שימור התנע כדי לגלות את המסה של פליסיטי והמכונית:

$$280 \cdot 5.282738095 + m_{felic} \cdot 4.439484127 = 280 \cdot 3.893849206 + m_{felic} \cdot 7.217261905$$

$$m_{felic} = 280 \cdot \tfrac{5.282738095 - 3.893849206}{7.217261905 - 4.439484127} = 280 \cdot \tfrac{1.388888889}{2.777777778} = 0.5 \cdot 280 = 140\ [kg]$$

ג. המסה של אוליבר פליסיטי והמכונית ביחד: $220\ [kg]$. התנועה בסעיפים הללו היא במהירות קבועה, חוץ מאשר בהתנגשויות. נתחיל עם הכיוונים ההתחלתיים:

$$\theta_f = tan^{-1}(\tfrac{40-25}{25-10}) = 45^\circ = \tfrac{\pi}{4}\ [rad]$$

$$\theta_b = tan^{-1}(\tfrac{25-40}{40-25}) = 135^\circ = \tfrac{5\pi}{4}\ [rad]$$

בנוסף, קל לראות כי המרחק בין הנקודות ההתחלתיות של שתי המכוניות והנקודה אליהן הם כוונו זהה. מכיוון ובארי מתחיל בנסיעה כשפליסיטי בחצי הדרך במהירות כפולה ממנה, הם יתנגשו לראשונה בנקודה זאת. המהירויות ההתחלתיות שלהם במטרים לשנייה:

$$v_{f,0} = \tfrac{10}{3.6}\ [\tfrac{m}{s}] = 2\tfrac{7}{9}\ [\tfrac{m}{s}];\ v_{b,0} = 2v_f = 5\tfrac{5}{9}\ [\tfrac{m}{s}]$$

נבחן מתי ההתנגשות הראשונה תקרה ומה יהיו המהירויות לאחר מכן:

$$d = \sqrt{(40-25)^2 + (25-10)^2} = \sqrt{450} = 21.21320344\ [m] \approx 21.21[m]$$

$$\Rightarrow t_{imp} = \tfrac{d}{v} = 7.636753237\ [s]$$

כעת להתנגשות עצמה. לאחר ההתנגשות אוליבר ינהג לכיוון 135° ובארי בכיוון 45° ויהיה שימור תנע (בשני הצירים):

$$m_{foc} \cdot v_{fo,0x} + m_b \cdot v_{b,0x} = m_{foc} \cdot v_{fo,1x} + m_b \cdot v_{b,1x}$$

$$\Rightarrow 220 \cdot 2\tfrac{7}{9} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 170 \cdot 5\tfrac{5}{9} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = -220 \cdot v_{fo1} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 170 \cdot v_{b1} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow v_{b1} = 1\tfrac{5}{17} \cdot 2\tfrac{7}{9} - 5\tfrac{5}{9} + 1\tfrac{5}{17} \cdot v_{fo1}$$
$$m_{foc} \cdot v_{fo,0y} + m_b \cdot v_{b,0y} = m_{foc} \cdot v_{fo,1y} + m_b \cdot v_{b,1y}$$
$$\Rightarrow 220 \cdot 2\tfrac{7}{9} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 170 \cdot 5\tfrac{5}{9} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 220 \cdot v_{fo1} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 170 \cdot v_{b1} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow 1\tfrac{5}{17} \cdot 2\tfrac{7}{9} + 5\tfrac{5}{9} = 1\tfrac{5}{17} \cdot v_{fo1} + 1\tfrac{5}{17} \cdot 2\tfrac{7}{9} - 5\tfrac{5}{9} + 1\tfrac{5}{17} \cdot v_{fo1} \Rightarrow v_{fo1} = \frac{2 \cdot 5\frac{5}{9}}{2 \cdot 1\frac{5}{17}} = 4.292929293\ [\tfrac{m}{s}] \approx 4.29\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$\Rightarrow v_{b1} = 1\tfrac{5}{17} \cdot 2\tfrac{7}{9} - 5\tfrac{5}{9} + 1\tfrac{5}{17} \cdot 4.292929293 = 3.594771242\ [\tfrac{m}{s}]$$

בהמשך, שתי המכוניות יתנגשו בקיר האופקי. נבדוק עבור כל מכונית מתי זה קורה. נתחיל עם פליסיטי ואוליבר שהמיקום שלהם עד ההתנגשות הבאה נתון על ידי:
$$(25 - 4.292929293 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 7.636753237), 40 + 4.292929293 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 7.636753237))$$
נבדוק מתי $y = 50\ [m]$:
$$40 + 4.292929293 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 7.636753237) = 50 \Rightarrow t_{fowall1} = 10.93103895\ [s]$$
ומיקום הא שלהם יהיה
$$x_{fowall1} = 25 - 4.292929293 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (10.93103895 - 7.636753237) = 15\ [m]$$
(מכיוון שהשיפוע של וקטור המהירות שלהם הוא -1 הגיוני שהם עברו אותו מרחק בכל ציר. זה יחזור על עצמו במהלך השאלה). כעת פליסיטי תנהג.

עבור בארי, המיקום עד ההתנגשות עם הקיר:
$$(25 + 3.594771242 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 7.636753237), 40 + 3.594771242 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 7.636753237))$$
נבדוק מתי $y = 50\ [m]$:
$$40 + 3.594771242 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 7.636753237) = 50 \Rightarrow t_{bwall1} = 11.57083824\ [s]$$
ומיקום הא שלו יהיה
$$x_{fowall1} = 25 + 3.594771242 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (11.57083824 - 7.636753237) = 35\ [m]$$

ההתנגשות הבאה של אוליבר ופליסיטי תהיה עם הקיר האנכי:
$$\vec{r} = (15 - 4.292929293 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 10.93103895), 50 - 4.292929293 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 10.93103895))$$
ההתנגשות עם הקיר בx=0:
$$15 - 4.292929293 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 10.93103895) = 0 \Rightarrow t_{fowall2} = 15.87246751\ [s]$$
וכמובן מיקומם בציר הע יהיה פשוט נמוך ב15: $y_{fowall2} = 35\ [m]$. ועכשיו אוליבר נוהג.

עבור בארי, המיקום עד ההתנגשות עם הקיר האנכי:
$$\vec{r}_b = (35 + 3.594771242 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 11.57083824), 50 - 3.594771242 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 11.57083824))$$
נבדוק מתי $x = 50\ [m]$:
$$35 + 3.594771242 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 11.57083824) = 50 \Rightarrow t_{bwall2} = 17.47196574\ [s]$$

ומיקום הע שלו יהיה $y_{bwall2} = 35\ [m]$.

כעת שניהם ב $y = 35\ [m]$ ופונים למסלולים מצטלבים. המיקום של אוליבר עד ההתנגשות הבאה:

$$\vec{r}_{fo} = (4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 15.87246751), 35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 15.87246751))$$

ושל בארי:

$$\vec{r}_b = (50 - 3.594771242 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 17.47196574), 35 - 3.594771242 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 17.47196574))$$

כעת נשווה בין מיקום הא שלהם ומיקום הע ונראה אם הוא מתקבל אותו זמן. אם כן התנגשות, אם לא פספוס. עבור הא:

$$4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 15.87246751) = 50 - 3.594771242 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 17.47196574)$$

$$\Rightarrow t_x = 25.5661\ [s]$$

עבור הע:

$$35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 15.87246751) = 35 - 3.594771242 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 17.47196574)$$

$$\Rightarrow t_y = 7.636753218\ [s]$$

כלומר, לא תתרחש התנגשות.

ההתנגשות הבאה עבור שתי המכוניות תהיה עם הקיר האופקי התחתון.

המיקום של אוליבר:

$$\vec{r} = (4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 15.87246751), 35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 15.87246751))$$

נבדוק מתי $y = 0\ [m]$:

$$35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 15.87246751) = 0 \Rightarrow t_{fowall3} = 27.40246749\ [s]$$

ומיקום הא שלו יהיה $x_{fowall3} = 35\ [m]$ ופליסיטי נוהגת.

עבור בארי, המיקום עד ההתנגשות עם הקיר האופקי:

$$\vec{r}_b = (50 - 3.594771242 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 17.47196574), 35 - 3.594771242 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 17.47196574))$$

נבדוק מתי $y = 0\ [m]$:

$$35 - 3.594771242 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 17.47196574) = 0 \Rightarrow t_{bwall3} = 31.24026324\ [s]$$

ומיקום הא שלו יהיה $x_{bwall3} = 15\ [m]$.

ההתנגשות הבאה עבור פליסיטי תהיה עם הקיר ב $x = 50\ [m]$. המיקום שלה:

$$\vec{r} = (35 + 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 27.40246749), 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 27.40246749))$$

נבדוק מתי $x = 50\ [m]$:

$$35 + 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 27.40246749) = 50 \Rightarrow t_{fowall4} = 32.34389605\ [s]$$

ומיקום הא שלה יהיה $y_{fowall4} = 15\ [m]$ ואוליבר נוהג.

ההתנגשות הבאה עבור בארי תהיה עם הקיר ב$x=0\ [m]$. המיקום:

$$\vec{r}_b=(15-3.594771242\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-31.24026324),3.594771242\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-31.24026324))$$

נבדוק מתי $x=0\ [m]$:

$$15-3.594771242\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-31.24026324)=0\Rightarrow t_{bwall4}=37.14139074\ [s]$$

ומיקום הא שלו יהיה $y_{bwall4}=15\ [m]$. כאמור, גודל המהירות של בארי חוזר להיות $5\frac{5}{9}\ [\frac{m}{s}]$.

כעת שניהם ב$y=15\ [m]$ ופונים למסלולים מצטלבים. המיקום של אוליבר עד ההתנגשות הבאה:

$$\vec{r}_{fo}=(50-4.292929293\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-32.34389605),15+4.292929293\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-32.34389605))$$

ושל בארי:

$$\vec{r}_b=(5\frac{5}{9}\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-37.14139074),15+5\frac{5}{9}\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-37.14139074))$$

כעת נשווה בין מיקום הא שלהם ומיקום הע ונראה אם הוא מתקבל אותו זמן. אם כן התנגשות, אם לא פספוס. עבור הא:

$$50-4.292929293\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-32.34389605)=5\frac{5}{9}\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-37.14139074)$$
$$\Rightarrow t_x=42.23\ [s]$$

עבור הע:

$$15+4.292929293\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-32.34389605)=15+5\frac{5}{9}\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-37.14139074)$$
$$\Rightarrow t_y=53.4529\ [s]$$

כלומר, לא תתרחש התנגשות.

ההתנגשות הבאה עבור שתי המכוניות תהיה עם הקיר ב$y=50\ [m]$.

המיקום של אוליבר:

$$\vec{r}=(50-4.292929293\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-32.34389605),15+4.292929293\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-32.34389605))$$

נבדוק מתי $y=50\ [m]$:

$$15+4.292929293\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-32.34389605)=50\Rightarrow t_{fowall5}=43.87389603\ [s]$$

ומיקום הא שלו יהיה$x_{fowall5}=15\ [m]$ ופליסיטי נוהגת.

המיקום של בארי:

$$\vec{r}_b=(5\frac{5}{9}\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-37.14139074),15+5\frac{5}{9}\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-37.14139074))$$

נבדוק מתי $y=50\ [m]$:

$$15+5\frac{5}{9}\ \cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(t-37.14139074)=50\Rightarrow t_{bwall5}=46.05093618\ [s]$$

ומיקום הא שלו יהיה$x_{bwall5}=35\ [m]$

ההתנגשות הבאה עבור פליסיטי תהיה עם הקיר ב$x = 0\ [m]$. המיקום שלה:

$$\vec{r} = (15 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 43.87389603), 50 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 43.87389603))$$

נבדוק מתי $x = 0\ [m]$:

$$15 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 43.87389603) = 0 \Rightarrow t_{fowall6} = 48.81532459\ [s]$$

ומיקום הא שלה יהיה $y_{fowall6} = 35\ [m]$ ואוליבר נוהג.

ההתנגשות הבאה עבור בארי תהיה עם הקיר ב$x = 50\ [m]$. המיקום:

$$\vec{r}_b = (35 + 5\tfrac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 46.05093618), 50 - 5\tfrac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 46.05093618))$$

נבדוק מתי $x = 50\ [m]$:

$$(35 + 5\tfrac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 46.05093618) = 50 \Rightarrow t_{bwall6} = 49.8693128\ [s]$$

ומיקום הא שלו יהיה $y_{bwall6} = 35\ [m]$.

כעת שניהם ב$y = 35\ [m]$ ופונים למסלולים מצטלבים. המיקום של אוליבר עד ההתנגשות הבאה:

$$\vec{r} = (4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 48.81532459), 35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 48.81532459))$$

ושל בארי:

$$\vec{r}_b = (50 - 5\tfrac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 49.8693128), 35 - 5\tfrac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 49.8693128))$$

כעת נשווה בין מיקום הא שלהם ומיקום הע ונראה אם הוא מתקבל אותו זמן. אם כן התנגשות, אם לא פספוס. עבור הא:

$$4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 48.81532459) = 50 - 5\tfrac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 49.8693128)$$
$$\Rightarrow t_x = 56.5897\ [s]$$

עבור הע:

$$35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 48.81532459) = 35 - 5\tfrac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 49.8693128)$$
$$\Rightarrow t_y = 53.4529\ [s]$$

כלומר, לא תתרחש התנגשות.

ההתנגשות הבאה עבור שתי המכוניות תהיה עם הקיר ב$y = 0\ [m]$.

המיקום של אוליבר:

$$\vec{r} = (4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 48.81532459), 35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 48.81532459))$$

נבדוק מתי $y = 0\ [m]$:

$$35 - 4.292929293 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 48.81532459) = 0 \Rightarrow t_{fowall7} = 60.34532457\ [s]$$

וזה כבר מעבר לטווח הזמן הנתון ולכן לא ייכלל בספירה.

המיקום של בארי:

$\vec{r}_b = (50 - 5\frac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 49.8693128), 35 - 5\frac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 49.8693128))$

נבדוק מתי $y = 0\ [m]$:

$35 - 5\frac{5}{9} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (t - 49.8693128) = 0 \Rightarrow t_{bwall7} = 58.77885824\ [s]$

ומיקום הx שלו יהיה $x_{bwall7} = 15\ [m]$. קל לראות כי לא תתרחש התנגשות נוספת.

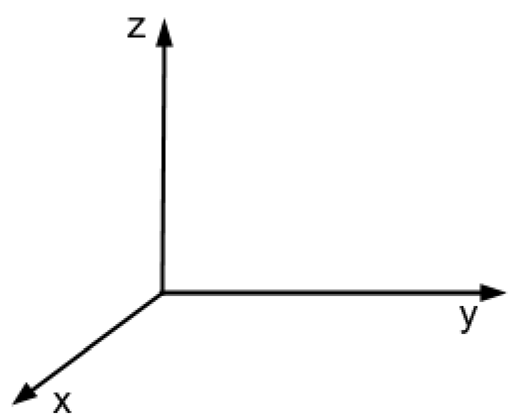
אם כך, מספר הפעמים שבארי ופליסיטי התנגשו במשך דקה אחת הוא: 1

מספר הפעמים שבארי התנגש בקיר במשך דקה אחת הוא: 7.

ד. מספר הפעמים שאוליבר ובארי התנגשו במשך דקה אחת הוא: 0

מספר הפעמים שאוליבר התנגש בקיר במשך דקה אחת הוא: 3.

29) א. ראשית נגדיר מערכת צירים:



כאשר התנועה המקורית התרחשה במישור xz.

בשיא הגובה המהירות האנכית מתאפסת. על הגוף לא פועלים כוחות חיצוניים בציר האופקי ולכן הרכיב האופקי של התנע שלו נשמר. בנוסף, כאמור האנרגיה מוכפלת פי ארבע:

$m_{tot} \cdot v_{xi} = m_a \cdot v_{x,a} + m_b \cdot v_{x,b} \Rightarrow 12 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4v_{x,a} + 8v_{x,b} \Rightarrow 75 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = v_{x,a} + 2v_{x,b}$

$4 \cdot \frac{m_{tot}v_{x,i}^2}{2} = \frac{m_a v_{x,a}^2}{2} + \frac{m_b v_{x,b}^2}{2} \Rightarrow 4 \cdot 12 \cdot (\frac{25\sqrt{2}}{2})^2 \cdot = 4v_{x,a}^2 + 8v_{x,b}^2 \Rightarrow 3750 = v_{x,a}^2 + 2v_{x,b}^2$

$\Rightarrow 3750 = (53.03300859 - 2v_{x,b})^2 + 2v_{x,b}^2 \Rightarrow 0 = 6v_{x,b}^2 - 212.1320344v_{x,b} - 937.5$

$v_{x,b} = \frac{212.13 \pm \sqrt{212.13^2 + 24 \cdot 937.5}}{12} = 39.3283\ or\ -3.97297$

כאשר נתון שחלק זה הוא זה שעף אחורה ולכן יקבל את הערך השלילי כלומר

$v_{x,b} = -3.97297\ [\frac{m}{s}] \approx -3.97[\frac{m}{s}]$

מה שמשאיר אותנו עם החלק שעף קדימה:

$v_{x,a} = 75 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2v_{x,b} = 60.97894859\ [\frac{m}{s}] \approx 60.98\ [\frac{m}{s}]$

וכמובן רכיבי הz מיד לאחר הפיצוץ הם 0.

ב. בשביל זה נצטרך לדעת מה הגובה המקסימלי בו הם התפוצצו. נשתמש ב$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta z$:

$z_{max} = \frac{0 - (\frac{25\sqrt{2}}{2})^2}{-2 \cdot 9.81} = 15.92762487\ [m]$

נחשב עבור על גוף בנפרד. נתחיל עם גוף a. נמצא את הזמן שלוקח לו לפגוע בקרקע:

$$0 = 15.92762487 - \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{15.93}{4.905} = 3.247222196 \Rightarrow t_{land,a} = 1.802005049\ [s]$$

התעלמנו מהתוצאה השלילית הלא פיזיקלית. כעת, חישוב המרחק האופקי הוא פשוט:

$$\Delta x_a = v_{x,a} \cdot t_{land,a} = 60.97894859 \cdot 1.802005049 = 109.8843732\ [m] \approx 109.88\ [m]$$

נבצע תהליך דומה עבור גוף b. מכיוון שתאוצתו,מהירותו ההתחלתית ומיקומו ההתחלתי בציר y זהים, גם זמן הפגיעה יהיה זה. לכן:

$$\Delta x_b = v_{x,b} \cdot t_{land,a} = 3.97297 \cdot 1.802005049 = 7.159311999\ [m] \approx 7.16\ [m]$$

ג. נתחיל מגוף a. נחשב את רכיב המהירות האנכית שלו כשהגיע למחצית הגובה:

$$v_{z,a}^2 = -2 \cdot g \cdot \left(\frac{-15.92762487}{2}\right) = 156.25 \Rightarrow v_{z,a} = -12.5\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

כעת נעלם כוח המשיכה ובאותו רגע מתרחש הפיצוץ. מכיוון שלא פועלים כלל כוחות כל רכיב של התנע נשמר:

$$m_a \cdot v_{x,a} = 0.5 m_a \cdot (v_{x,a1} + v_{xa2})$$
$$m_a \cdot v_{z,a} = 0.5 m_a \cdot (v_{z,a1} + v_{za2})$$
$$0 = 0.5 m_a \cdot (v_{y,a1} + v_{ya2})$$

והאנרגיה הקינטית הוכפלה פי 4:

$$4 \cdot \frac{m_a v_a^2}{2} = \frac{m_a v_{a1}^2}{4} + \frac{m_a v_{a2}^2}{4}$$

בנוסף, הכיוונים של של המהירויות במישור xz מקבילים למהירות המקורית. נתחיל עם רכיב y.
נתון כי $v_{ya1} = 2\ \left[\frac{m}{s}\right]$

$$0 = 2 + v_{ya2} \Rightarrow v_{ya2} = -2\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

בשאר הצירים משימור התנע:

$$2v_{x,a} = v_{x,a1} + v_{xa2} \Rightarrow v_{xa1} = 121.9578972 - v_{xa2}$$
$$2v_{z,a} = v_{z,a1} + v_{za2} \Rightarrow v_{za1} = -25 - v_{za2}$$

כעת, נציב במשוואה של האנרגיה הקינטית(אחרי שנכפיל את המשוואה פי 4 ונחלק ב m_a):

$$8 \cdot (60.97894859^2 + 0^2 + 12.5^2) = v_{xa1}^2 + 2^2 + v_{za1}^2 + v_{xa2}^2 + 2^2 + v_{za2}^2$$

כעת נשתמש בכך שאנו יודעים שהחלק שניתז קדימה משמר את הכיוון שלו במישור xz. זה אומר שהיחס בין רכיב x וz שלו נשמר:

$$\frac{v_{za1}}{v_{xa1}} = \frac{-12.5}{60.97894859} = -0.204988775$$

ואז:

$$\Rightarrow v_{xa1} = 121.9578972 - v_{xa2}$$
$$\Rightarrow -0.204988775 v_{xa1} = -25 - v_{za2}$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב0.204988775 ונחבר בין המשוואות לקבלת:

$$\Rightarrow 0 = 24.99999994 - 25 - 0.204988775\ v_{xa2} - v_{za2}$$

כמובן, שזה אמור להיות 25-25, ואז מקבלים שהיחס בין הרכיבים של הרסיס השני זהה. נציב את דברים אלו במשוואה של האנרגיות:

$$30997.45737 - 8 = (121.9578972 - v_{xa2})^2 + (25 + v_{za2})^2 + v_{xa2}^2 + v_{za2}^2$$
$$30989.45737 = (121.9578972 - v_{xa2})^2 + (25 - 0.204988775v_{xa2})^2 + v_{xa2}^2 + (-0.204988775v_{xa2})^2$$
$$\Rightarrow ... \Rightarrow v_{xa2} = 166.579 \ or \ -44.6215 \Rightarrow we\ know\ it\ goes\ left \Rightarrow v_{xa2} = -44.6215\ [\tfrac{m}{s}] \approx -44.62[\tfrac{m}{s}]$$

שאר הרכיבים הרלוונטיים (מהצבה במשוואות מלמעלה):

$$v_{xa1} = 121.96 + 44.62 = 166.579\ [\tfrac{m}{s}] \approx 166.58\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$v_{za1} = -0.204988775 \cdot v_{xa1} = -34.14682515\ [\tfrac{m}{s}] \approx -34.15\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$v_{za2} = -0.204988775 \cdot v_{xa2} = 9.146906624\ [\tfrac{m}{s}] = 9.15\ [\tfrac{m}{s}]$$

אז המהירות של הרסיס שממשיך קדימה היא: $(166.58, 2, -34.15)$, והמהירות של הרסיס שניתז אחורה היא $(-44.62, -2, 9.15)$.

ד. נחשב את הזמן עד הפיצוץ:

$$\Delta x = -0.5 \cdot 7.159311999 - 3.97297t \Rightarrow t_{exp,b} = 0.901003518\ [s]$$
$$v_{zb} = -0.901003518g = -8.838844519\ [\tfrac{m}{s}]$$

מכאן החישוב דומה לסעיף הקודם: נעלם כוח המשיכה ובאותו רגע מתרחש הפיצוץ. מכיוון שלא פועלים כלל כוחות כל רכיב של התנע נשמר:

$$m_b \cdot v_{x,b} = m_b \cdot (\tfrac{1}{3}v_{x,b1} + \tfrac{2}{3}v_{xb2})$$
$$m_b \cdot v_{z,b} = 0.5m_b \cdot (\tfrac{1}{3}v_{z,b1} + \tfrac{2}{3}v_{zb2})$$
$$0 = m_b \cdot (\tfrac{1}{3}v_{y,b1} + \tfrac{2}{3}v_{yb2})$$

והאנרגיה הקינטית הוכפלה פי 4:

$$4 \cdot \frac{m_b v_b^2}{2} = \frac{m_b v_{b1}^2}{6} + \frac{m_b v_{b2}^2}{3}$$

בנוסף, הכיוונים של של המהירויות במישור xz מקבילים למהירות המקורית. נתחיל עם רכיב y. נתון כי $v_{yb2} = -1\ [\tfrac{m}{s}]$

$$0 = \tfrac{1}{3}v_{y,b1} - \tfrac{2}{3} \Rightarrow v_{yb1} = 2\ [\tfrac{m}{s}]$$

בשאר הצירים משימור התנע:

$$3v_{x,b} = v_{x,b1} + 2v_{xb2} \Rightarrow v_{xb1} = -11.91891 - 2v_{xb2}$$
$$3v_{z,b} = v_{z,b1} + 2v_{zb2} \Rightarrow v_{zb1} = -26.51653356 - 2v_{zb2}$$

כעת, נציב במשוואה של האנרגיה הקינטית(אחרי שנכפיל את המשוואה פי 6 ונחלק בm_b):

$$12 \cdot (3.97297^2 + 0^2 + 8.838844519^2) = v_{xb1}^2 + 2^2 + v_{zb1}^2 + 2 \cdot v_{xb2}^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot v_{zb2}^2$$

כעת נשתמש בכך שאנו יודעים שהחלק שניתז קדימה משמר את הכיוון שלו במישור xz. זה אומר שהיחס בין רכיב x וz שלו נשמר:

$$\frac{v_{zb1}}{v_{xb1}} = \frac{-8.838844519}{-3.97297} = 2.224745012$$

וראינו עבור סעיף קודם שאותו יחס יתקיים עבור הרסיס השני.

נציב את דברים אלו במשוואה של האנרגיות:

$$1126.915957-6=(11.91891+2v_{xb2})^2+(26.51653356+2v_{zb2})^2+2\cdot v_{xb2}^2+2\cdot v_{zb2}^2$$
$$1120.915957=(11.91891+2v_{xb2})^2+(26.51653356+4.44949002v_{xb2})^2+2\cdot v_{xb2}^2+2\cdot(2.224745012v_{xb2})^2$$
$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow v_{xb2}=0.875602\ or\ -8.82154 \Rightarrow we\ know\ it\ goes\ right \Rightarrow v_{xb2}=0.875602\ [\tfrac{m}{s}]\approx 0.88\ [\tfrac{m}{s}]$$

שאר הרכיבים הרלוונטיים (מהצבה במשוואות מלמעלה):

$$v_{xb1}=\ -11.91891-1.751204=\ -13.670114\ [\tfrac{m}{s}]\approx\ -13.67\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$v_{zb1}=2.224745012\cdot v_{xb1}=\ -30.41251794\ [\tfrac{m}{s}]\approx\ -30.41\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$v_{zb2}=2.224745012\cdot v_{xb2}=1.947991182\ [\tfrac{m}{s}]=1.95\ [\tfrac{m}{s}]$$

אז המהירות של הרסיס שממשיך קדימה היא: $(-13.67,2,-30.41)$, והמהירות של הרסיס שניתז אחורה היא $(0.88,-1,1.95)$.

ה. נחליט ששיא הגובה נמצא ב$x=0$, כך שהפיצוץ הראשון מתרחש ב $(0,0,15.92762487)$. בנוסף, נחליט שהפיצוץ הראשון התרחש ב$t=0$. חישבנו מתי מתרחש הפיצוץ מהסעיף הקודם (נכנה אותו פיצוץ b). נחשב מתי קרה פיצוץ a: או יודעים שעד הפיצוץ התנועה היא בתאוצה קבועה ואנו יודעים את המהרות בזמן הפיצוץ, ולכן:

$$-12.5=\ -gt\Rightarrow t_{exp,a}=1.27420999\ [s]$$

כלומר סדר הפיצוצים הוא: הפיצוץ המקורי, פיצוץ b ופיצוץ a אחרון.

לחישוב מיקום ומהירות מרכז מסה נשתמש ב: $\vec{r}_{c.m}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i};\ \vec{v}_{c.m}=\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}$

<u>חצי שנייה אחרי הפיצוץ המקורי:</u> יש עדיין את שני הרסיסים המקוריים a וb שנעים תחת השפעת כוח המשיכה. נחשב את המיקום והמהירות של כל רסיס לאחר חצי שנייה. נתחיל עם רסיס a:

$$x_{a,0.5}=v_{xa}\cdot 0.5=30.4894743\ [m];\ z_{a,0.5}=15.92762487-\tfrac{g}{2}\cdot\tfrac{1}{4}=14.70137487\ [m]$$
$$v_{xa}=60.9789486\ [\tfrac{m}{s}];\ v_{za,0.5}=\ -0.5g=\ -4.905\ [\tfrac{m}{s}]$$

ורסיס b:

$$x_{b,0.5}=v_{xb}\cdot 0.5=\ -1.986485\ [m];\ z_{b,0.5}=15.92762487-\tfrac{g}{2}\cdot\tfrac{1}{4}=14.70137487\ [m]$$
$$v_{xb}=\ -3.97297\ [\tfrac{m}{s}];\ v_{zb,0.5}=\ -0.5g=\ -4.905\ [\tfrac{m}{s}]$$

וכמובן, בציר y כל המיקומים והמהירויות הם 0.

$$x_{c.m,0.5}=\tfrac{4\cdot 30.4894743+8\cdot(-1.986485)}{12}=8.838834767\ [m]\approx 8.84\ [m]$$
$$z_{c.m,0.5}=\tfrac{4\cdot 14.70137487+8\cdot 14.70137487}{12}=14.70137487\ [m]\approx 14.70\ [m]$$
$$v_{x,c.m,0.5}=\tfrac{4\cdot 60.9789486+8\cdot(-3.97297)}{12}=17.67766953\ [\tfrac{m}{s}]\approx 17.68\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$v_{z,c.m,0.5}=\tfrac{4\cdot(-4.905)+8\cdot(-4.905)}{12}=\ -4.905\ [\tfrac{m}{s}]\approx\ -4.91\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$\vec{r}_{c.m,\ 0.5}=(8.84,0,14.7);\qquad \vec{v}_{c.m,0.5}=(17.68,0,-4.91)$$

<u>0.2 שניות לאחר הפיצוץ השני:</u> רסיס a עדיין ממשיך כאילו לא קרה כלום, ולכן:

$x_{a,1.1} = v_{xa} \cdot (0.901003518 + 0.2) = 67.13803693\ [m];$

$z_{a,1.1} = 15.92762487 - \frac{g}{2} \cdot (1.101003518)^2 = 9.981740968\ [m]$

$v_{xa} = 60.9789486\ [\frac{m}{s}];\ v_{za,1.1} = -1.101003518g = -10.80084451\ [\frac{m}{s}]$

מבחינת רסיס b, המהירויות של הרסיסים שלו קבועים בשלב זה ומצאנו אותן כבר. נבדוק איפה התרחש הפיצוץ ואז נבדוק איפה נמצאים הרסיסים שלנו. מבחינת מיקום x אנו יודעים:

$x_{exp,b} = -7.159311999 \cdot 0.5 = -3.579656\ [m]$

$z_{exp,b} = 15.92762487 - \frac{g}{2} \cdot (0.901003518)^2 = 11.94570987\ [m]$

ומכאן הרסיסים של b ממשיכים במהירויות קבועות למשך $0.2\ [s]$:

$x_{b1,1.1} = x_{exp,b} + 0.2 \cdot (-13.67) = -6.3136788\ [m]$

$y_{b1,1.1} = 0.2 \cdot 2 = 0.4\ [m]$

$z_{b1,1.1} = z_{exp,b} + 0.2 \cdot (-30.41) = 5.863206282\ [m]$

$x_{b2,1.1} = x_{exp,b} + 0.2 \cdot (0.88) = -3.4045356\ [m]$

$y_{b2,1.1} = 0.2 \cdot (-1) = -0.2\ [m]$

$z_{b2,1.1} = z_{exp,b} + 0.2 \cdot (1.95) = 12.33530823\ [m]$

והחישובים למרכז מסה:

$x_{c.m,1.1} = \frac{4 \cdot 67.13803693 + \frac{8}{3} \cdot (-6.3136788) + \frac{16}{3} \cdot (-3.4045356)}{12} = 19.46317898\ [m] \approx 19.46\ [m]$

$y_{c.m,1.1} = \frac{\frac{8}{3} \cdot 0.4 + \frac{16}{3} \cdot (-0.2)}{12} = 0\ [m]$

$z_{c.m,1.1} = \frac{4 \cdot 9.981740968 + \frac{8}{3} \cdot 5.863206282 + \frac{16}{3} \cdot 12.33530823}{12} = 10.11254093\ [m] \approx 10.11\ [m]$

$v_{x,c.m,1.1} = \frac{4 \cdot 60.9789486 + \frac{8}{3} \cdot (-13.670114) + \frac{16}{3} \cdot 0.875602}{12} = 17.67766953\ [\frac{m}{s}] \approx 17.68\ [\frac{m}{s}]$

$v_{y,c.m,1.1} = \frac{\frac{8}{3} \cdot 2 + \frac{16}{3} \cdot (-1)}{12} = 0\ [\frac{m}{s}]$

$v_{z,c.m,1.1} = \frac{4 \cdot (-10.80084451) + \frac{8}{3} \cdot (-30.41251794) + \frac{16}{3} \cdot 1.947991182}{12} = -9.492844965\ [\frac{m}{s}] \approx -9.49\ [\frac{m}{s}]$

$\vec{r}_{c.m,\ 1.1} = (19.46, 0, 10.11);\qquad \vec{v}_{c.m,1.1} = (17.68, 0, -9.49)$

<u>3 שניות לאחר הפיצוץ השלישי:</u> נתחיל עם חלקיק a ונעניק לו טיפול דומה לזה שהענקנו לb: נבדוק איפה התרחש הפיצוץ ואז נבדוק איפה נמצאים הרסיסים שלנו. מבחינת מיקום z אנו יודעים (חצי גובה):

$z_{exp,a} = 15.92762487 \cdot 0.5 = 7.963812435\ [m]$

$x_{exp,b} = 60.97894859 \cdot 1.27420999 = 77.69998547\ [m]$

ומכאן הרסיסים של a ממשיכים במהירויות קבועות למשך $3\ [s]$:

$x_{a1,4.3} = x_{exp,a} + 3 \cdot (166.58) = 577.4369855[m]$

$y_{a1,4.3} = 3 \cdot 2 = 6\ [m]$

$z_{a1,4.3} = z_{exp,a} + 3 \cdot (-34.15) = -94.47666302\ [m]$

$$x_{a2,4.3} = x_{exp,a} + 3 \cdot (-44.62) = -56.16451453\ [m]$$
$$y_{a2,4.3} = 3 \cdot (-2) = -6\ [m]$$
$$z_{a2,4.3} = z_{exp,a} + 3 \cdot (9.15) = 35.40453231\ [m]$$

בשביל הרסיסים של b. קודם נחשב כמה זמן עבר מהפיצוץ שלו:

$$\Delta t = 4.27420999 - 0.901003518 = 3.373206472\ [s]$$

ואז:

$$x_{b1,4.3} = x_{exp,b} + 3.373206472 \cdot (-13.67) = -49.69177302\ [m]$$
$$y_{b1,4.3} = 3.373206472 \cdot 2 = 6.746412944\ [m]$$
$$z_{b1,4.3} = z_{exp,b} + 3.373206472 \cdot (-30.41) = -90.64199248[m]$$
$$x_{b2,4.3} = x_{exp,b} + 3.373206472 \cdot (0.88) = -0.626069666\ [m]$$
$$y_{b2,4.3} = 3.373206472 \cdot (-1) = -3.373206472\ [m]$$
$$z_{b2,4.3} = z_{exp,b} + 3.373206472 \cdot (1.95) = 18.51668633\ [m]$$

ולמרכז מסה:

$$x_{c.m,4.3} = \frac{2 \cdot 577.4369855 + 2 \cdot (-56.16451453) + \frac{8}{3} \cdot (-49.69177302) + \frac{16}{3} \cdot (-0.626069666)}{12} = 75.55787575\ [m] \approx 75.56\ [m]$$
$$y_{c.m,4.3} = \frac{2 \cdot 6 + 2 \cdot (-6) + \frac{8}{3} \cdot (6.746412944) + \frac{16}{3} \cdot (-3.373206472)}{12} = 0\ [m]$$
$$z_{c.m,4.3} = \frac{2 \cdot (-94.47666302) + 2 \cdot 35.40453231 + \frac{8}{3} \cdot (-90.64199248) + \frac{16}{3} \cdot 18.51668633}{12} = -21.75838175\ [m] \approx -21.76\ [m]$$
$$v_{x,c.m,4.3} = \frac{2 \cdot 166.579 + 2 \cdot (-44.6215) + \frac{8}{3} \cdot (-13.670114) + \frac{16}{3} \cdot 0.875602}{12} = 17.67760333\ [\tfrac{m}{s}] \approx 17.68\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$v_{y,c.m,4.3} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + \frac{8}{3} \cdot 2 + \frac{16}{3} \cdot (-1)}{12} = 0\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$v_{z,c.m,4.3} = \frac{2 \cdot (-34.14682515) + 2 \cdot 9.146906624 + \frac{8}{3} \cdot (-30.41251794) + \frac{16}{3} \cdot 1.947991182}{12} = -10.05921655\ [\tfrac{m}{s}] \approx -10.06\ [\tfrac{m}{s}]$$
$$\vec{r}_{c.m,4.3} = (75.56, 0, -21.76); \qquad \vec{v}_{c.m,4.3} = (17.68, 0, -10.06)$$