1) א.

$\vec{A}+\vec{B}= 8\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z}-4\hat{x}+2\hat{y}+\hat{z}= 4\hat{x}+5\hat{y}= (4,5,0)$

$\vec{C}+\vec{D}= 2\hat{x}-4\hat{y}-3\hat{z}-\hat{y}+3\hat{z}= 2\hat{x}-5\hat{y}= (2,-5,0)$

$\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}= 8\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z}-4\hat{x}+2\hat{y}+\hat{z}-\hat{y}+3\hat{z}= 4\hat{x}+4\hat{y}+3\hat{z}= (4,4,3)$

$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}= 4\hat{x}+4\hat{y}+3\hat{z}+2\hat{x}-4\hat{y}-3\hat{z}= 6\hat{x}= (6,0,0)$

ב.

$\vec{A}-\vec{D}= 8\hat{x}+3\hat{y}-\hat{z}-(-\hat{y}+3\hat{z})= 8\hat{x}+4\hat{y}-4\hat{z}= (8,4,-4)$

$\vec{C}-\vec{B}= 2\hat{x}-4\hat{y}-3\hat{z}-(-4\hat{x}+2\hat{y}+\hat{z})= 6\hat{x}-6\hat{y}-4\hat{z}= (6,-6,-4)$

$(\vec{A}+\vec{B})-(\vec{C}+\vec{D})= 4\hat{x}+5\hat{y}-(2\hat{x}-5\hat{y})= 2\hat{x}+10\hat{y}= (2,10,0)$

ג. נזכור כי:

$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1;\;\; \hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{x}\cdot\hat{z}=0$

לכן:

$\vec{B}\cdot\vec{D}= (-4\cdot 0)+(2\cdot(-1))+(1\cdot 3)= 0-2+3=1$

$\vec{A}\cdot\vec{C}= (8\cdot 2)+(3\cdot(-4))+((-1)\cdot(-3))= 16-12+3= 7$

$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{D}= 0-5+0= -5$

$\vec{A}-\vec{C}= 6\hat{x}+7\hat{y}+2\hat{z}= (6,7,2) \Rightarrow (\vec{A}-\vec{C})\cdot\vec{B}= -24+14+2= -8$

ד.

$$\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{8^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{64+9+1}=\sqrt{74}$$

זהו הגודל של הוקטור $\vec{A}$.

ה. על מנת למצוא את הזווית נשתמש ב:

$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot cos\theta \Rightarrow cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$

בנוסף, נזכור את הקשר בין מעלות ורדיאנים: $\alpha^\circ=\alpha\cdot\frac{\pi}{180}\,[rad]$.

לכן עבור $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$:

$cos\theta=\frac{(8\cdot(-4))+(3\cdot 2)+(1\cdot(-1))}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2+1^2}}=\frac{-27}{\sqrt{74\cdot 21}}=\frac{-27}{\sqrt{1554}}\approx -0.685$

$\theta\approx 133^\circ= 2.33\,[rad]= 0.74\pi\,[rad]$

עבור $\vec{C}+\vec{D}$ ו-$\vec{D}$:

$cos\theta=\frac{(2\cdot 0)+((-5)\cdot(-1))+(0\cdot 3)}{\sqrt{2^2+(-5)^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{29\cdot 10}}=\frac{5}{\sqrt{290}}\approx 0.294$

$\theta\approx 73^\circ= 1.27\,[rad]= 0.41\pi\,[rad]$

2) א. נתון לנו: $|\vec{A}|=10,\; |\vec{B}|=20,\; |\vec{A}+\vec{B}|=25$. לפי משפט הקוסינוסים: $c^2=a^2+b^2+2abcos\gamma$

.

נציב ונקבל:

$25^2 = 10^2 + 20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot cos\gamma \Rightarrow cos\gamma = \frac{25^2-10^2-20^2}{2\cdot 10\cdot 20} = \frac{625-100-400}{400} = \frac{125}{400} = \frac{5}{16}$

$\gamma = cos^{-1}\frac{5}{16} = 71.79^\circ = 1.25\ [rad] = 0.4\pi\ [rad]$

ב. נתון: $|\vec{u}| = 10,\ \varphi_1 = 60^\circ,\ \varphi_2 = \pi[rad]$. נפרק את הוקטור לרכיבים קרטזיים:

$\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y};\ \ u_x = u \cdot cos\varphi,\ u_y = u \cdot sin\varphi$

I. בשביל φ_1 :

$u_x = 10 \cdot cos60^\circ = 5, \quad u_y = 10 \cdot sin60^\circ \approx 8.66 \Rightarrow \vec{u} = (5, 8.66)$

II. בשביל φ_2 :

$u_x = 10 \cdot cos\pi = -10, \quad u_y = 10 \cdot sin\pi = 0 \Rightarrow \vec{u} = (-10, 0)$

3) נכנה את הנקודות: $A = (1,2,3)\ ,\ B = (4,5,6),\ C = (4,5,4),\ D = (1,2,7)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2 + (6-3)^2} = 3\sqrt{3} \approx 5.196$

$|\vec{BC}| = \sqrt{(4-4)^2 + (5-5)^2 + (4-6)^2} = 2$

$|\vec{CD}| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2 + (7-4)^2} = 3\sqrt{3} \approx 5.196$

$|\vec{DA}| = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-7)^2} = 4$

4) $\vec{A} = 8\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + 3\hat{z}$

א.

$|\vec{A}| = \sqrt{8^2 + (\frac{1}{2})^2 + 3^2} = \sqrt{64 + \frac{1}{4} + 9} = \sqrt{73.25} \approx 8.559$

ב. היטלו של הוקטור $\vec{A}$ על מישור xz הוא פשוט $\vec{A}_{xz} = \vec{A} - \frac{1}{2}\hat{y} = 8\hat{x} + 3\hat{z}$ (כלומר, אין לו רכיב בכיוון y) ואורכו:

$|\vec{A}_{xz}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73} \approx 8.544$

ג. נחפש וקטור $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$ שמקיים את הדרישות $\vec{B} \cdot \vec{A} = 0$ (ניצב ל$\vec{A}$), ו $|\vec{B}| = 1$:

$B_x \cdot 8 + B_y \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 3 = 0$

$\sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1$

$\Rightarrow B_y = -16B_x$

נציב במשוואה השנייה:

$\sqrt{B_x^2 + (-16B_x)^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{257 \cdot B_x^2} = 1 \Rightarrow B_x = \pm\frac{1}{\sqrt{257}} \Rightarrow B_y = \mp\frac{16}{\sqrt{257}}$

כלומר, שני הוקטורים המקיימים את הדרישות (שהם בעצם פונים לכיוונים הפוכים):

$\vec{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{257}} \cdot (\hat{x} - 16\hat{y});\ \ \vec{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{257}} \cdot (-\hat{x} + 16\hat{y})$

5) א.ניזכר כי $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt};\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ונשתמש גם ב $cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$.

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2 \cdot (t-4)\hat{x} + (2t+3)\hat{y} = (2t+8)\hat{x} + (2t+3)\hat{y}$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = 2\hat{x} + 2\hat{y}$

$cos\theta = \frac{(2t+8)\cdot 2+(2t+3)\cdot 2}{\sqrt{(2t-8)^2+(2t+3)^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{4t+16+4t+6}{\sqrt{4t^2-32t+64+4t^2+12t+9}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{8t+22}{\sqrt{8t^2-20t+73}\cdot\sqrt{8}} = \frac{8t+22}{\sqrt{8(8t^2-20t+73)}}$

$\theta = cos^{-1}[\frac{8t+22}{\sqrt{8(8t^2-20t+73)}}]$

ב. קיבלנו ביטוי לגודל של מהירות כשחישבנו את הזווית:

$|\vec{v}| = \sqrt{8t^2 - 20t + 73}$

נגזור ביטוי זה לפי הזמן ונשווה לאפס:

$\frac{dv}{dt} = \frac{16t-20}{2\sqrt{8t^2-20t+73}} = \frac{8t-10}{\sqrt{8t^2-20t+73}} = 0 \Rightarrow 8t = 10 \Rightarrow t_{min} = 1.25\ [sec]$

נוודא שזו אכן נקודת מינמום בעזרת נגזרת שנייה:

$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{8\cdot\sqrt{8t^2-20t+73}-(8t-10)\frac{8t-10}{\sqrt{8t^2-20t+73}}}{8t^2-20t+73} = \frac{8\cdot(8t^2-20t+73)-(8t-10)^2}{(8t^2-20t+73)^{3/2}}$

$\frac{d^2v}{dt^2}(t = 1.25) = \frac{8\cdot(8\cdot 1.5625-20\cdot 1.25+73)-(8\cdot 1.25-10)^2}{(8\cdot 1.5626-20\cdot 1.25+73)^{3/2}} = \frac{8\cdot 60.5-0}{(60.5)^{3/2}} > 0$

וזו אכן נקודת מינימום. וקטור המהירות ברגע זה יהיה:

$\vec{v}(t = 1.25) = (2\cdot 1.25 + 8)\hat{x} + (2\cdot 1.25 + 3)\hat{y} = 10.5\hat{x} + 5.5\hat{y}$

ג. ראשית נחשב את המיקום אליו הגיע החלקיק לאחר עשר שניות:

$\vec{r}(t = 10) = (10-4)^2\hat{x} + (10^2 + 3\cdot 10)\hat{y} = (36, 130)$

כעת נחשב את המיקום ההתחלתי שלו:

$\vec{r}_0 = (0-4)^2\hat{x} + (0^2 + 3\cdot 0)\hat{y} = (16, 0)$

כעת נבדוק האם הם שווים עבור זמן כלשהו:

$\vec{r}_{new} = \vec{r}_0 \Rightarrow 36 - 10sin(\frac{\pi}{4}t') - 5t' = 16\ and\ 130 + 16.25t'^2 - 97.5t' = 0$

מהמשוואה עבור הע נקבל:

$130 + 16.25t'^2 - 97.5t' = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{97.5\pm\sqrt{9506.25-8450}}{32.5} = \frac{97.5\pm 32.5}{32.5} = 3 \pm 1 \Rightarrow t'_{1,2} = 2,4\ [sec]$

כעת נציב את שתי התוצאות הללו במשוואה עבור x ונראה אם זה עובד:

$t' = 2\ [sec] \Rightarrow 36 - 10sin(\frac{\pi}{4}\cdot 2) - 5\cdot 2 = 16 \Rightarrow 36 - 10\cdot 1 - 10 = 36 - 20 = 16$

$t' = 4\ [sec] \Rightarrow 36 - 10sin(\frac{\pi}{4}\cdot 4) - 5\cdot 4 = 16 \Rightarrow 36 - 10\cdot 0 - 20 = 36 - 20 = 16$

כלומר, החלקיק חוזר פעמיים למיקומו ההתחלתי: לאחר 2 שניות ולאחר 4 שניות.

6) א. ראשית נחשב את המהירות אליה ידיע דני לאחר 10 דקות.

$v(t = \frac{1}{6}\ [hour]) = v_0 + at = 0 + 660\cdot\frac{1}{6} = 110\ [\frac{km}{h}]$

כעת, נחשב בנפרד את הדרך שעבר בעשר דקות הראשונות, ואז נחשב כמה זמן לקח לדני לעשות את שאר הדרך ונוסיף זאת לעשר הדקות:

$x(t = \frac{1}{6}\ [h]) = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} = 0 + 0 + 330\cdot(\frac{1}{6})^2 = 9\frac{1}{6}\ [km]$

לאחר מכן הוא ממשיך לנסוע במהירות קבועה. נראה כמה זמן ייקח לו:

$50 = x_0 + vt = 9\frac{1}{6} + 110t \Rightarrow 110t = 40\frac{5}{6} \Rightarrow t = \frac{49}{132}\ [h]$

לכן ייקח לדני $\frac{71}{132}$ שעות להגיע לעיר, שזה $32\frac{3}{11}$ דקות.

ב. נבדוק כמה זמן לקח לגיל להגיע לעיר (נחלק לחלק ראשון במהירות קבועה וחלק שני בתאוצה קבועה), ונשווה מול הזמן מסעיף א' לאחר שהוספנו לו שעה (גיל התחיל בנסיעה שעה לפני דני):

$\Delta x_{g1} = 100 = 90t_{g1} \Rightarrow t_{g1} = 1\frac{1}{9}[h]$

$\Delta x_{g2} = 50 = 90t_{g2} + \frac{400}{2}t_{g2}^2 \Rightarrow 20t_{g2}^2 + 9t_{g2} - 5 = 0 \Rightarrow t_{g2} = \frac{-9\pm\sqrt{81+400}}{40} = \frac{-9\pm 21.9317122}{40}$

התשובה השלילית לא רלוונטית, ולכן הזמן שייקח לו לעבור את קטע הדרך השני הוא:

$t_{g2} = 0.323292805[h]$

כעת, נשווה בין הזמנים שלקחו לשני החברים להגיע לעיר מהרגע שהו דני צלצל לגיל:

$t_{d,tot} = 1 + \frac{71}{132} \approx 1.538[h]$

$t_{g,tot} = 1\frac{1}{9} + 0.323292805 \approx 1.434\ [h]$

כלומר, גיל אכן הגיע לפני דני לעיר. נבדוק לאן דני הספיק להגיע ב$0.434[h]$. מסעיף א' אנו יודעים שלאחר 10 דקות הוא עבר $9\frac{1}{6}\ [km]$. בשאר הזמן עד שגיל הדיע לעיר, $\approx 0.267[h]$ הוא עבר עוד:

$\Delta x_{dd} = 110 \cdot 0.267 \approx 29.407\ [km]$

כלומר, סך הכל דני עבר $\approx 38.573\ [km]$, כלומר המרחק ביניהם כשגיל הגיע לעיר היה: $11.427[km]$.

7) א. בשאלה זאת אמיר ליחידות של מטר לשנייה. עבור שלושת הקטעים שצריך לחשב עבורם מהירות יש קווים ישרים במישור של זמן-מיקום, כלומר מהירות קבועה:

$v_{a,0-150} = \frac{1000-0}{150-0} = 6\frac{2}{3}[\frac{m}{s}]$

$v_{a,150-230} = \frac{4000-1000}{230-150} = 37.5[\frac{m}{s}]$

$v_{b,0-150} = \frac{3000-0}{150-0} = 20[\frac{m}{s}]$

ב. נשתמש ב $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$:

$4000 = 3000 + 20 \cdot 80 + a \cdot \frac{80^2}{2} \Rightarrow 3200a = -600 \Rightarrow a_{b,150-230} = -\frac{3}{16}[\frac{m}{s^2}]$

ג. עבור שלושת הקטעים שחושבו בסעיף א' יש מהירות קבועה, ועבור הקטע עם התאוצה המהירות לינארית בזמן. נחשב אותה:

$v_{b,150-230} = 20 - \frac{3}{16}(t-150)$

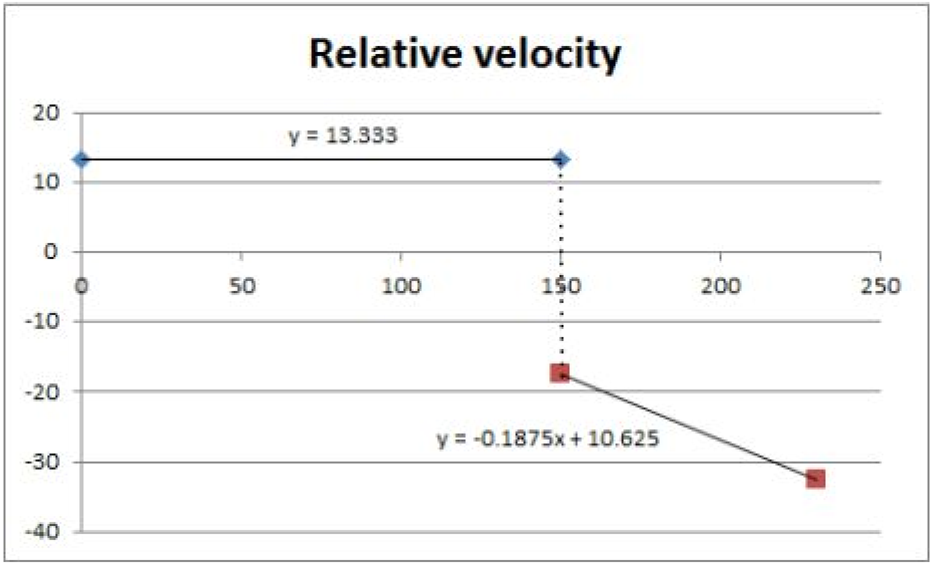
כאשר הצבה של 230 שניות תביא לנו מהירות סופית של:

$v_{bf} = 20 - \frac{3}{16} \cdot 80 = 20 - 15 = 5\ [\frac{m}{s}]$

המהירות היחסית עד 150 שניות היא פשוטה: $v_{rel,0-150} 20 - 6\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3}[\frac{m}{s}]$, ועבור הקטע השני:

$v_{rel,150-230} = 20 - \frac{3}{16}(t-150) - 37.5 = -17.5 - \frac{3}{16}t + 28.125 = -\frac{3}{16}t + 10.625$

(כמובן זה רק רלוונטי מ$t = 150 - 230\ [sec]$). נשרטט זאת:



כאשר המהירות היחסית הסופית היא $-32.5\ [\frac{m}{s}]$.

ד.נתייחס לנקודה שבה נפגשו הסירות בגרף הנתון בשאלה כנקודת האפס החדשה שלנו ונגדיר את זמן המפגש שלהם כ $t'=-100[s]$. במשך 100 שניות נעה סירה ב' במהירות $5[\frac{m}{s}]$, כלומר עברה $500[m]$ לפני שסירה א' חזרה לפעולה. כעת נמצא את התאוצות של שתיהן, נבדוק להן הגיעו לאחר שסיימו להאיץ, ואז נמצא ביטוי למקום המפגש שלהן. עבור סירה א' (נשתמש ב $v=v_0+at$) נקבל:

$$75=0+a_{a,0-20}\cdot 20 \Rightarrow a_{a,0-20}=3.75\ [\tfrac{m}{s^2}]$$

נמצא לאן הגיעה הסירה בזמן זה ($x=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$):

$$x_{a,20}=0+0+3.75\cdot\tfrac{20^2}{2}=750\ [m]$$

נבדוק מה סירה ב' השיגה בזמן זה כדי לראות האם סירה א' כבר השיגה אותה. קודם נחשב את התאוצה שלה:

$$20=5+a_{b,0-30}\cdot 30 \Rightarrow a_{b,100-130}=\tfrac{15}{30}=0.5\ [\tfrac{m}{s^2}]$$

$$x_{b,20}=500+5\cdot 20+0.5\cdot\tfrac{20^2}{2}=700$$

כלומר, הסירות נפגשו לפני שסירה א' סיימה להאיץ! נשווה בין הביטויים שלנו להעתק של גוף בתאוצה קבועה:

$$3.75\cdot\tfrac{t^2}{2}=500+5t+\tfrac{t^2}{4} \Rightarrow 1.625t^2-5t-500=0 \Rightarrow t=\tfrac{5\pm\sqrt{25+3250}}{3.25}=\tfrac{5\pm 57.22761571}{3.25}$$

ניקח כמובן את התשובה החיובית ונקבל:

$$t_m=\tfrac{62.22761571}{3.25}=19.14695868\approx 19.15\ [sec]$$

את המקום נמצא על ידי הצבה בביטוי להעתק של אחת הסירות ונוסיף את המרחק שעברו בסעיפים הקודמים ($4000[m]$):

$$x_{meet}=4000+3.75\cdot\tfrac{19.15^2}{2}=4687.39\ [m]$$

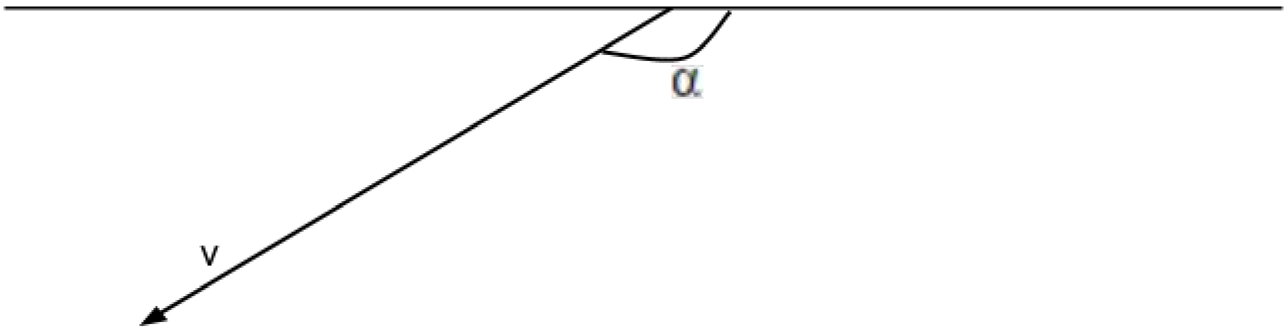
8) א. שאלה זו כמובן בשני מימדים. המסלול של אונייתו של אדום הזקן נתון על ידי:

$\vec{RB} = (15t, 0)$

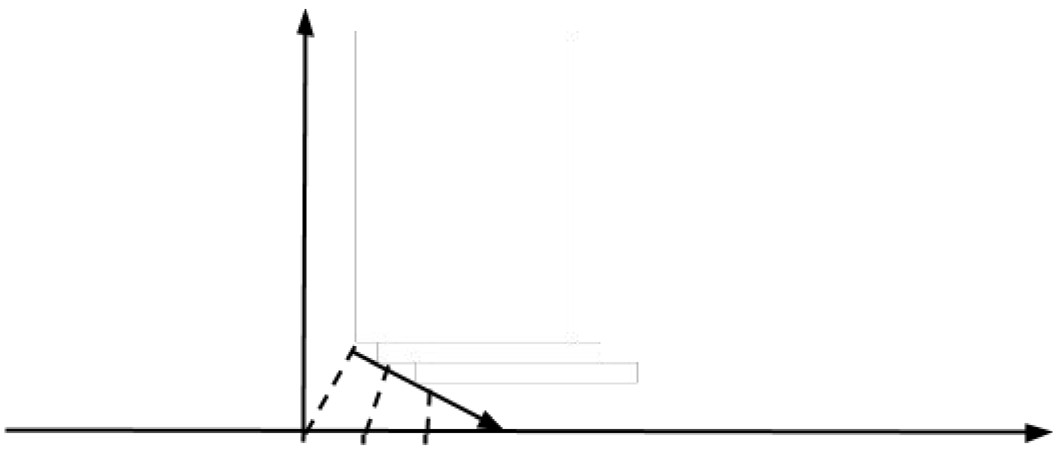
כאשר הגדרנו את המיקום ההתחלתי של אוניית הפיראטים בתור ראשית הצירים, את הרגע שבו הבחין לראשונה איש הצוות באוניית הסוחרים בתור $t = 0$ $[sec]$ ואת הציר מזרח-מערב בתור ציר הx וצפון-דרום בתור ציר הy. מסלולה של אוניית הסוחרים נתון על ידי:

$\vec{M} = (M_{0x} + vtcos\alpha, M_{0y} - vtsin\alpha)$

כאשר v הוא הגודל של המהירות של אוניית הסוחרים וα היא הזווית הבאה עם ציר הx:



והמסלולים של האוניות ייראו:



על פי הנתונים ב$t = 0$ $[sec]$:

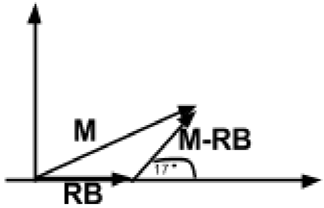
$\vec{M}(t=0) = (M_{0x}, M_{0y}) = (\frac{1}{5}sin30^{\circ}, \frac{1}{5}cos30^{\circ}) = (\frac{1}{10}, \frac{\sqrt{3}}{10})$

בזמן $t = \frac{1}{15}$ $[hours]$:

$\vec{RB}(t = \frac{1}{15}) = (1, 0)$

$\vec{M}(t = \frac{1}{15}) = (\frac{1}{10} + \frac{1}{15}vcos\alpha, \frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{15}vsin\alpha)$

הזווית שבו נראתה האונייה ביחס לצפון בזמן זה היא 17 מעלות, כלומר:



הוקטור של ההפרש ביניהם נתון על ידי:

$$\vec{M}-\vec{RB}\equiv\vec{C}_1=C_1\cdot(cos17^\circ,sin17^\circ)$$

מהחסרה של הוקטורים:

$$\vec{M}-\vec{RB}=(\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{15}vcos\alpha-1,\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{1}{15}vsin\alpha-0)=(\tfrac{-9}{10}+\tfrac{1}{15}vcos\alpha,\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{1}{15}vsin\alpha)$$

כלומר, מקבלים:

$$\tfrac{-9}{10}+\tfrac{1}{15}vcos\alpha=C_1\cdot cos17^\circ;\ \tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{1}{15}vsin\alpha=C_1\cdot sin17^\circ$$

$$\Rightarrow(\tfrac{-9}{10}+\tfrac{1}{15}vcos\alpha)\cdot\tfrac{1}{cos17^\circ}=(\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{1}{15}vsin\alpha)\cdot\tfrac{1}{sin17^\circ}\Rightarrow\tfrac{-9}{10}\cdot tan17^\circ+\tfrac{1}{15}vcos\alpha\cdot tan17^\circ=\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{1}{15}vsin\alpha$$

$$\Rightarrow\tfrac{1}{15}v\cdot(cos\alpha\cdot tan17^\circ+sin\alpha)=\tfrac{\sqrt{3}}{10}+\tfrac{9}{10}\cdot tan17^\circ\approx0.448\Rightarrow v=\tfrac{6.72}{cos\alpha\cdot tan17^\circ+sin\alpha}$$

נבצע חישוב דומה לזמן של 8 דקות או $t=\tfrac{2}{15}\ [hours]$:

$$\vec{RB}(t=\tfrac{2}{15})=(2,0)$$

$$\vec{M}(t=\tfrac{2}{15})=(\tfrac{1}{10}+\tfrac{2}{15}vcos\alpha,\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{2}{15}vsin\alpha)$$

הפעם הזווית בה נראתה האונייה ביחס לצפון היא 4 מעלות. לכן:

$$\vec{M}-\vec{RB}\equiv\vec{C}_2=C_2\cdot(cos4^\circ,sin4^\circ)$$

מהחסרה של הוקטורים:

$$\vec{M}-\vec{RB}=(\tfrac{1}{10}+\tfrac{2}{15}vcos\alpha-2,\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{2}{15}vsin\alpha-0)=(\tfrac{-19}{10}+\tfrac{2}{15}vcos\alpha,\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{2}{15}vsin\alpha)$$

כלומר, מקבלים:

$$\tfrac{-19}{10}+\tfrac{2}{15}vcos\alpha=C_2\cdot cos4^\circ;\ \tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{2}{15}vsin\alpha=C_2\cdot sin4^\circ$$

$$\Rightarrow(\tfrac{-19}{10}+\tfrac{2}{15}vcos\alpha)\cdot\tfrac{1}{cos4^\circ}=(\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{2}{15}vsin\alpha)\cdot\tfrac{1}{sin4^\circ}\Rightarrow\tfrac{-19}{10}\cdot tan4^\circ+\tfrac{2}{15}vcos\alpha\cdot tan4^\circ=\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{2}{15}vsin\alpha$$

$$\Rightarrow\tfrac{2}{15}v\cdot(cos\alpha\cdot tan4^\circ+sin\alpha)=\tfrac{\sqrt{3}}{10}+\tfrac{19}{10}\cdot tan4^\circ\approx0.306\Rightarrow v=\tfrac{2.295}{cos\alpha\cdot tan4^\circ+sin\alpha}$$

כעת נשווה בין הביטויים שקיבלנו לv על מנת למצוא את α :

$$\tfrac{6.72}{cos\alpha\cdot tan17^\circ+sin\alpha}=\tfrac{2.295}{cos\alpha\cdot tan4^\circ+sin\alpha}$$

$$\Rightarrow6.72\cdot tan4^\circ\cdot cos\alpha+6.72\cdot sin\alpha=2.295\cdot tan17^\circ\cdot cos\alpha+2.295\cdot sin\alpha$$

$$\Rightarrow(6.72\cdot tan4^\circ-2.295\cdot tan17^\circ)\cdot cos\alpha=(2.295-6.72)\cdot sin\alpha$$

$$\Rightarrow-0.232\cdot cos\alpha=\ -4.425\cdot\sqrt{1-cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow0.053824\cdot cos^2\alpha=\ 19.580625-19.580625\cdot cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow cos^2\alpha=0.997258695\Rightarrow cos\alpha=\pm0.998628407\Rightarrow\alpha\approx3.0^\circ\ or\ 177^\circ$$

מכיוון שאדום הזקן החליט להסתובב, נסיק כי האונייה נסעה דרום מערבה, ב3 מעלות מציר האיקס. והגודל של המהירות:

$$\Rightarrow v=\tfrac{2.295}{0.998628407\cdot tan4^\circ+0.052335956}=\tfrac{2.295}{0.122166857}=18.79\ [\tfrac{km}{h}]$$

כעת נמצא את המרחק בין האוניות. נמצא את מיקום אוניית הסוחרים בזמן זה:

$$\vec{M}(t=\tfrac{2}{15})=(\tfrac{1}{10}+\tfrac{2}{15}\cdot18.79\cdot cos3^\circ,\tfrac{\sqrt{3}}{10}-\tfrac{2}{15}\cdot18.79\cdot sin3^\circ)=(2.602,0.042)$$

והמרחק בין האוניות:

$$d=\sqrt{(2.602-2)^2+(0.042-0)^2}=\sqrt{0.362404+0.001764}=0.603\ [km]$$

ב. נבדוק תוך כמה זמן המהירות של האונייה של אדום הזקן תרד מתחת ל $4[\frac{km}{h}]$:

$$10 = 15 - 60t \Rightarrow t = \frac{5}{60}[hours] = 5[min]$$

נראה כמה לאן הגיעו האונייות בזמן זה ונחשב את המרחק ביניהן:

$$\vec{M}_2(t = 0.0152) = (2.602 + \frac{5}{60} \cdot 18.79 \cdot sin85^{\circ}, 0.042 + \frac{5}{60} \cdot 18.79 \cdot cos85^{\circ})$$

$$\vec{M}_2(t = 0.0152) = (2.602 + 1.560, 0.042 + 0.136) = (4.162, 0.178)$$

לעומתו אונייתו של אדום הזקן שטה בתאוצה קבועה ולכן תציית ל $r = r_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$:

$$\vec{RB}_2 = (2 + 15 \cdot \frac{5}{60} - \frac{60 \cdot}{2} \cdot (\frac{5}{60})^2, 0) = (3.042, 0)$$

נבדוק את המרחק ביניהן הפעם:

$$d_2 = \sqrt{(4.162 - 3.042)^2 + (0.178 - 0)^2} = \sqrt{1.254 + 0.032} = 1.134\ [km]$$

ולכן, אדום הזקן לא יצליח להשתלט על הספינה בלי לשנות כיוון.

9) נחשב את גודל המהירות של ג'וני

$$v_{John} = \sqrt{(1.4 \cdot 10^5)^2 + (1.8 \cdot 10^5)^2 + (0.9 \cdot 10^5)^2} = \sqrt{1.96 \cdot 10^{10} + 3.24 \cdot 10^{10} + 8.1 \cdot 10^9} = \sqrt{6.01 \cdot 10^{10}}$$

$$v_{John} = 2.45153013 \cdot 10^5\ [\frac{km}{h}]$$

ולכן מהירות העבריין:

$$v_{crim} = 2.45153013 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5 = 4.45153013 \cdot 10^5 \approx 4.45 \cdot 10^5\ [\frac{km}{h}] < 4.5 \cdot 10^5\ [\frac{km}{h}]$$

כלומר, ג'וני טעה שהחל לרדוף אחריו.

ב. נתחיל לפענח את המהירות של ג'וני. נתון שגודל המהירות הוכפל אך כיוונו נותר זהה, כלומר יש להכפיל את הוקטור בסקלר, ב2:

$$\vec{v}_{John,b} = (2.8 \cdot 10^5, 3.6 \cdot 10^5, 1.8 \cdot 10^5); \quad |\vec{v}_{John,b}| = 4.90306026 \cdot 10^5\ [\frac{km}{h}]$$

מהירותו של העבריין גדלה ל: $4.95153013 \cdot 10^5\ [\frac{km}{h}]$, כלומר ג'וני עדיין איטי יותר לכן אין חשש שהוא יעצור אותו לפני שצ'אק יגיע. נבדוק מתי צ'אק יגיע לנקודה שממנה ג'וני קרא לתגבורת. ראשית נבדוק מהדרך שעליו לעבור:

$$\Delta r_{chuck,b1i} = \sqrt{(2.3 \cdot 10^6 - 1.4 \cdot 10^6)^2 + (6.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5)^2 + (3.4 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5)^2}$$

$$\Delta r_{chuck,b1i} = \sqrt{(9 \cdot 10^5)^2 + (3.7 \cdot 10^5)^2 + (0.4 \cdot 10^5)^2} = \sqrt{8.1 \cdot 10^{11} + 1.369 \cdot 10^{11} + 1.6 \cdot 10^9}$$

$$\Delta r_{chuck,b1i} = \sqrt{9.485 \cdot 10^{11}} = 9.73909646 \cdot 10^5\ [km]$$

הוא נוסע במהירות קבועה וידועה,לכן הזמן שבו עבר מרחק זה:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{9.739... \cdot 10^5}{5.4 \cdot 10^5} = 1.803536383\ [h]$$

נבדוק מה המרחק שעבר ג'וני מהנקודה בה קרא לתגבורת בזמן זה ועוד החמש דקות שלקח לצ'אק לצאת.

$$\Delta r_{john,b1i} = (1.803536383 + \frac{1}{12}) \cdot 4.90306026 \cdot 10^5 = 9.25143592 \cdot 10^5\ [km]$$

הפעם נפתור באמצעות ערכים יחסיים. זהו המרחק היחסי ההתחלתי ביניהם, והמהירות היחסית ביניהם היא:

$$v_{rel} = v_{john,b} - v_{chuck,b} = \ -4.9693974 \cdot 10^4\ [\frac{km}{h}]$$

כעת נראה מתי הפער ביניהם יהיה 0 (מהירות קבועה):

$$0 = 9.25143592 \cdot 10^5 - 4.9693974 \cdot 10^4 t' \Rightarrow t' = 18.61681644[h]$$

לזה נוסיף את הזמן עד שצ'אק הגיע לנקודה שבה פנה ונקבל:

$$t_{catch\ up,\ 1} = 20.50368615\ [h] \approx 20.50\ [h]$$

כעת, נבדוק לאן הגיע ג'וני חמש דקות לאחר שקרא לתגבורת, נראה כמה זמן לקח לצ'אק להגיע לשם ואז נחשב את שארית הזמן.

$$\vec{r}_{john,after\ 5\ minutes} = (2.3 \cdot 10^6 + 2.8 \cdot 10^5 \cdot \tfrac{1}{12}, 6.7 \cdot 10^5 + 3.6 \cdot 10^5 \cdot \tfrac{1}{12}, 3.4 \cdot 10^5 + 1.8 \cdot 10^5 \cdot \tfrac{1}{12})$$

$$\vec{r}_{john,after\ 5\ minutes} = (2.323333333 \cdot 10^6, 7 \cdot 10^5, 3.55 \cdot 10^5)$$

הפעם, ברגע שבו ג'וני מגיע לנקודה זאת, צ'אק יוצא לכיוונה.

$$\Delta r_{chuck,b2i} = \sqrt{(2.323333333 \cdot 10^6 - 1.4 \cdot 10^6)^2 + (7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5)^2 + (3.55 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5)^2}$$

$$\Delta r_{chuck,b2i} = \sqrt{(9.23333333 \cdot 10^5)^2 + (4 \cdot 10^5)^2 + (0.55 \cdot 10^5)^2}$$

$$\Delta r_{chuck,b2i} == \sqrt{8.52544444 \cdot 10^{11} + 1.6 \cdot 10^{11} + 3.025 \cdot 10^9} = \sqrt{1.015569 \cdot 10^{12}} = 1.007754434 \cdot 10^6\ [km]$$

הוא נוסע במהירות קבועה וידועה,לכן הזמן שבו עבר מרחק זה:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{1.0...\cdot 10^6}{5.4 \cdot 10^5} = 1.866211916\ [h]$$

נבדוק מה המרחק שעבר ג'וני בזמן זה:

$$\Delta r_{john,2i} = 1.866211916 \cdot 4.90306026 \cdot 10^5 = 9.15014948 \cdot 10^5\ [km]$$

המהירות היחסית הרלוונטית נשארה זהה, נראה שוב כמה זמן ייקח לצ'אק לצמצם את הפער:

$$0 = 9.15014948 \cdot 10^5 - 4.9693974 \cdot 10^4 t' \Rightarrow t' = 18.41299607[h]$$

לזה נוסיף את הזמן עד שצ'אק הגיע לנקודה שבה פנה ונקבל:

$$t_{catch\ up,\ 2} = 20.36254132\ [h] \approx 20.36\ [h]$$

ג. על מנת שיבצע תנועה מעגלית קצובה עליו לקיים את התנאי $a = \frac{v^2}{r}$. הכוח הכולל שפועל עליו הוא $10^8[N]$. על פי החוק השני של ניוטון כוח זה שווה ma. ראשית נמיר את רדיוס הסיבוב למטרים (כדי שהיחידות יתאימו): $R = 2.5 \cdot 10^7[km] \cdot 1000[\frac{m}{km}] = 2.5 \cdot 10^{10}[m]$

$$10^8 = 1000a \Rightarrow a = 10^5 = \frac{v^2}{2.5 \cdot 10^{10}} \Rightarrow v^2 = 2.5 \cdot 10^{15} \Rightarrow v = 5 \cdot 10^7\ [\frac{m}{s}] = 5 \cdot 10^7[\frac{m}{s}] \cdot 3600[\frac{s}{h}] \cdot \frac{1}{1000}[\frac{km}{m}]$$

$$v = 1.8 \cdot 10^8\ [\frac{km}{h}]$$

ידוע לנו שהוא מבצע רבע סיבוב (בשביל פנייה של 90 מעלות). נמצא את זמן המחזור, T, על ידי מציאת ω:

$$\omega = \frac{v}{r} = 0.002[\frac{rad}{s}] = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 1000\pi = 3141.592654\ [s]$$

והזמן בשביל רבע סיבוב:

$t_{turn,chuck} = 0.25T = 785.3981634\ [s] \approx 13.09\ [min]$

ד. נעשה חישוב דומה עבור ג'וני, אך קודם נמיר את מהירותו:

$v = \frac{2.52\cdot10^8}{3.6}[\frac{m}{s}] = 7\cdot10^7[\frac{m}{s}]$

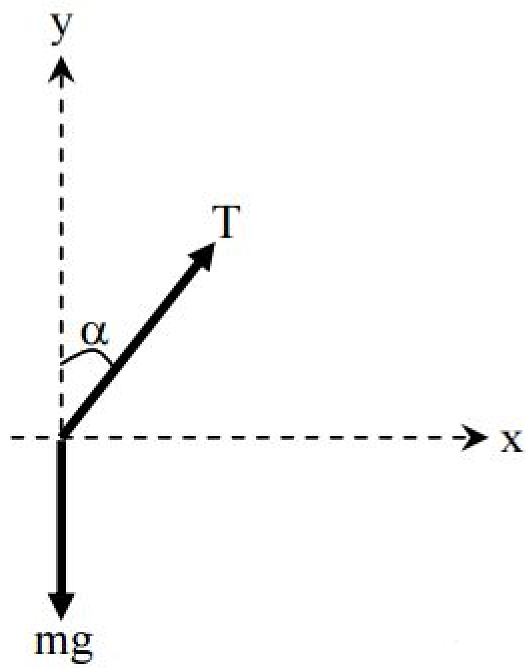
$2\cdot10^8 = 2000a \Rightarrow a = 10^5 = \frac{(7\cdot10^7)^2}{R} \Rightarrow R = 4.9\cdot10^{10}\ [m] = 4.9\cdot10^7[km]$

ועבור זמן הפנייה:

$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{700} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 1400\pi = 4398.229715\ [h]$

$t_{turn,john} = 0.25T = 1099.557429\ [s] \approx 18.33\ [min]$

10) א.



כשהכוח השקול פעול ימינה.

ב. כדי שהמשקולת תהיה בזווית קבועה, היא צריכה להאיץ יחד עם המכונית. כלומר:

$a_{weight} = a_{car}$.

שקול הכוחות בציר האנכי הוא אפס: $\Sigma F_y = T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha}$. ושקוף הכוחות בציר האופקי שווה:

$\Sigma F_x = T\sin\alpha = ma_{weight} \Rightarrow ma_{weight} = mg\tan\alpha \Rightarrow a_{car} = a_{weight} = g\tan30^\circ = 5.663806141\ [\frac{m}{s^2}] = 5.66\ [\frac{m}{s^2}]$

לכיוון ימין.

ג. נשתמש בביטוי $a = g\tan\alpha$ שמצאנו בסעיף קודם:

$2\cdot5.663806141 = g\tan\alpha_{new} \Rightarrow \alpha_{new} = \tan^{-1}(\frac{11.32761228}{9.81}) = 49.10660535^\circ \approx 49.11^\circ \approx 0.86\ [rad]$

ד. אין להכפלת המסה השפעה על הזווית. המסה מצטמצמת בחישובים.

11)א. לאחר שמפסיקים להפעיל כוח חיצוני המהירות הופכת להיות קבועה כלומר התאוצה מתאפסת. הכוח שהפועל על המערכת כולה הוא כוחות הכובד שפועלים על שני הגופים (המתיחות היא כוח פנימי).

אם התאוצה מתאפסת, זה אומר שכוחות הכובד שפועלים על שני הגופים זהים, כלומר שמסת הגוף השני זהה למסת הגוף הראשון: $m_2 = 0.5\ [kg]$.

ב. שקול הכוחות כשפועל הכוח החיצוני הוא הכוח החיצוני עצמו שכן שאר הכוחות מבטלים אחד את השני. שיפוע הגרף יהיה תאוצת המערכת, $a = \frac{30-0}{6-0} = 5[\frac{m}{s^2}]$, ולפי החוק השני של ניוטון:

$$F_1 = m_{tot}a = 1 \cdot 5 = 5\ [N]$$

ג. עכשיו נסתכל ספציפית על גוף 1. גוף אחד מאיץ בתאוצה של $5[\frac{m}{s^2}]$ בזמן זה. לפי החוק השני של ניוטון:

$$\Sigma F_1 = m_1 a = F_1 + m_1 g - T \Rightarrow 0.5 \cdot 5 = 5 + 0.5 \cdot 9.81 - T \Rightarrow T = 7.405\ [N] \approx 7.41\ [N]$$

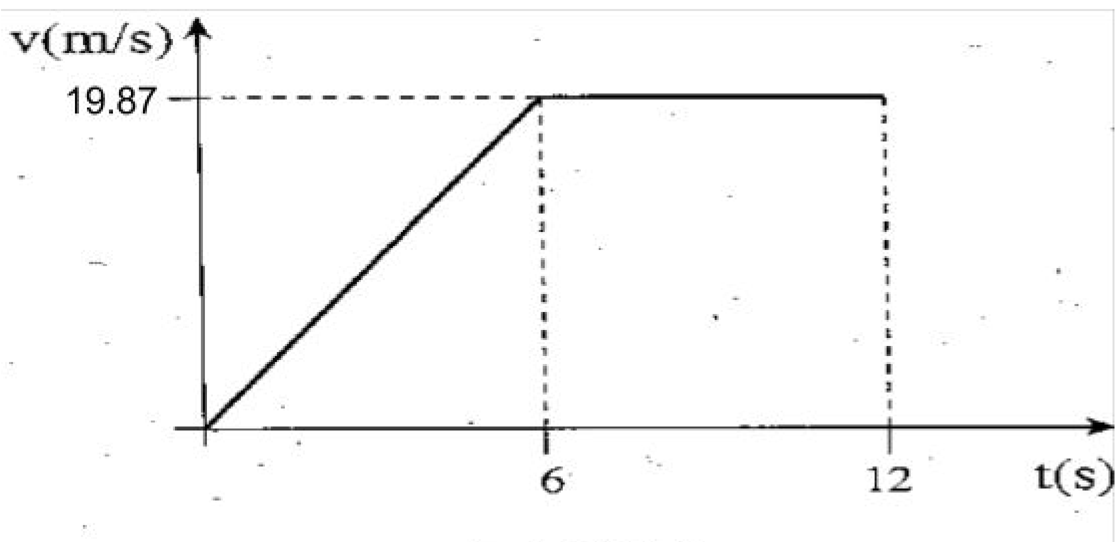
ד. הגלגלת במנוחה, ולכן מתקיים:

$$\Sigma F_c = 0 = T_c - 2T \Rightarrow T_c = 2T = 2 \cdot 7.405 = 14.81\ [N]$$

ה. מבחינת שקול הכוחות, שקול הכוחות זהה לזה שבסעיף הראשון אבל, המסה הכוללת ב6 השניות הראשונות משתנה! מסת הגוף השלישי, $m_3 = \frac{F_1}{g} = 0.509683995\ [kg]$, מתווספת למסה הכוללת. ולכן התאוצה תשתנה בשש השניות הראשונות והגרף ישתנה. נחשב את התאוצה בשש השניות הראשונות:

$$F_1 = 5 = 1.509683995a \Rightarrow a = 3.311951384\ [\frac{m}{s^2}] \approx 3.31\ [\frac{m}{s^2}]$$

בגרף יתכווץ פי m_3:



תרשים ב

מי שרוצה - קח/י הפסקה עליי אפילו שהגרף היה שונה.