22)

א.

$$\int_0^{10}(x\cdot(x-7)+16x^3)dx = \int_0^{10}(x^2-7x+16x^3)dx = [\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{7}{2}x^2+4x^4]_{x=0}^{10} = [\tfrac{1}{3}\cdot 10^3-\tfrac{7}{2}\cdot 10^2+4\cdot 10^4-0]$$

$$\Rightarrow \int_0^{10}(x\cdot(x-7)+16x^3)dx = [333\tfrac{1}{3}-350+40000] = 39983\tfrac{1}{3}$$

ב.

$$\int_7^4(\tfrac{x^4}{2}-\tfrac{2}{x^4})dx = [\tfrac{x^5}{10}+\tfrac{2}{3x^3}]_{x=7}^4 = [\tfrac{4^5}{10}+\tfrac{2}{3\cdot 4^3}-\tfrac{7^5}{10}-\tfrac{2}{3\cdot 7^3}] = -1578.291527 \approx -1578.29$$

ג.

$$\int_{14}^{54}(\sqrt{12x+6}+\sqrt{4}+\sqrt{x-1})dx = [\tfrac{2}{3\cdot 12}\cdot(12x+6)^{\frac{3}{2}}+2x+\tfrac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}]_{x=14}^{54}$$

$$= [929.1677279+108+257.2305494-127.5120909-28-31.24811105] = 1107.638075 \approx 1107.64$$

ד.

$$\int_{-62}^{-10}(\tfrac{-13}{(2x+3)^2}+5\cdot\tfrac{(x-8)}{(x-8)^4}+2.3)dx = \int_{-62}^{-10}(\tfrac{-13}{(2x+3)^2}+5\cdot\tfrac{1}{(x-8)^3}+2.3)dx = [\tfrac{13}{2\cdot(2x+3)}-\tfrac{5}{2\cdot(x-8)^2}+2.3x]_{x=-62}^{-10}$$

$$= [\tfrac{-13}{34}-\tfrac{5}{648}-23+\tfrac{13}{242}+\tfrac{5}{9800}+142.6] = 119.2641602 \approx 119.26$$

ה.

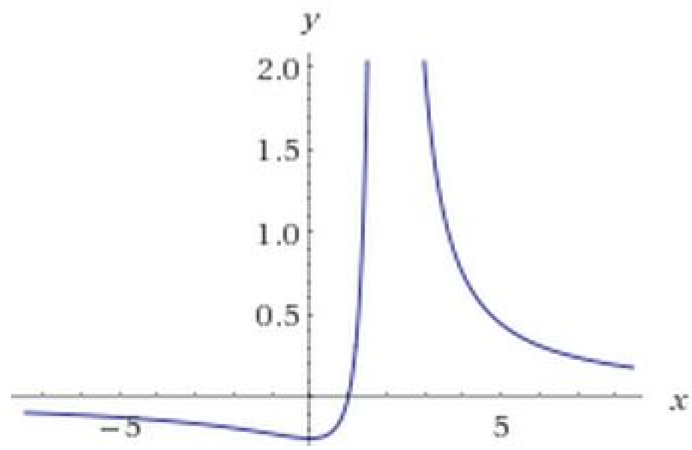
$$\int_{-2\pi}^{2\pi}(cos(4x+\tfrac{\pi}{4})-sin(x)cos(x)+sin^2(x))dx = \int_{-2\pi}^{2\pi}(cos(4x+\tfrac{\pi}{4})-\tfrac{1}{2}sin(2x)+\tfrac{1}{2}\cdot(1-cos(2x))dx$$

$$= [\tfrac{1}{4}sin(4x+\tfrac{\pi}{4})+\tfrac{1}{4}cos(2x)+\tfrac{1}{2}\cdot(x-\tfrac{1}{2}sin(2x))]_{x=-2\pi}^{2\pi}$$

$$= [\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\cdot(2\pi-0)-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}(-2\pi-0)] = 2\pi$$

23) א. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 2$.

ב.



חישוב השטח בין הישרים הנתונים, הגרף וציר הx הוא פשוט חישוב של האינטגרל:

$$S_b = \int_{-4}^{-1}(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2})dx = [ln|x-2| - \frac{1}{x-2}]_{x=-4}^{-1} = [ln|-3| - \frac{1}{-3} - ln|-6| + \frac{1}{-6}] = [ln(3) + \frac{1}{3} - ln(6) - \frac{1}{6}]$$

$$= \frac{1}{6} + ln(\frac{3}{6}) = \frac{1}{6} + ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} - ln(2) = \ -0.526480513$$

כמובן שטח הוא גודל חיובי, לכן ניקח את הערך המוחלט של ערך זה:

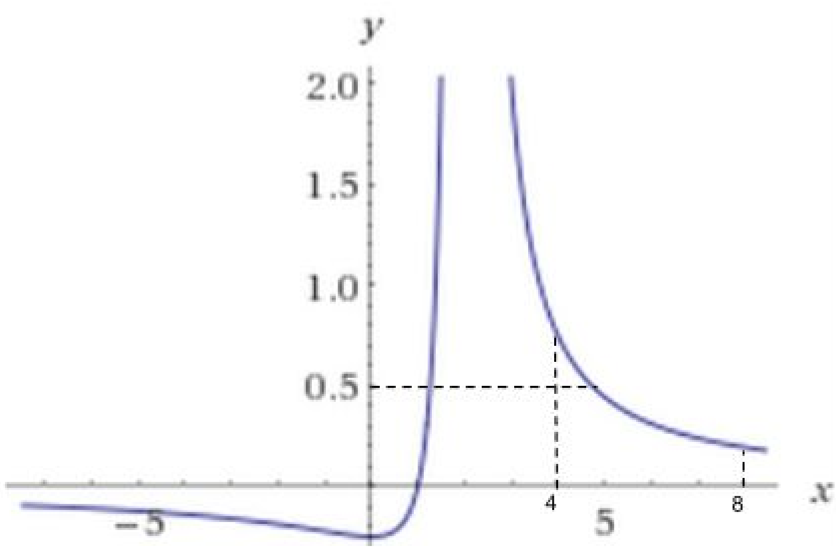
$$\Rightarrow S_b = 0.526480513 \approx 0.53$$

ג. הפעם, אנו נצאים מימין לנקודת ההתבדרות. נבדוק לאיזה x מתאים הישר $y = 0.5$ על גבי הפונקציה:

$$0.5 = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow 0.5 \cdot (x-2)^2 = x - 2 + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x - 4 + 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{6-\sqrt{12}}{2} = 1.732050808; \quad x_2 = \frac{6+\sqrt{12}}{2} = 4.732050808$$

התוצאה הראשונה לא רלוונטית לטווח שלנו, אבל התוצאה השנייה כן. מה שאנו מקבלים הוא בעצם:



נפרק את השטח למלבן בין $x = 4$ ו$x = 4.732050808$, ולחישוב שטח באמצעות אינטגרציה על הפונקציה משם ועד סוף הטווח:

$$S_c = 0.5 \cdot 0.732050808 + \int_{4.732050808}^{8} (\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2})dx = 0.366025403 + |[ln|x-2| - \frac{1}{x-2}]_{x=4.732050808}^{8}|$$
$$S_c = 0.366025403 + |[ln|6| - \frac{1}{6} - ln|2.732050808| + \frac{1}{2.732050808}]| = 0.366025403 + 0.986065667$$
$$S_c = 1.35209107$$

ד. נבדוק איפה הישר והפונקציה נפגשים (משמאל לראשית הצירים):

$$\frac{35x}{32} + 2 = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow (\frac{35}{32}x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 4) = x - 2 + 1 \Rightarrow \frac{35}{32}x^3 - \frac{35}{8}x^2 + \frac{35}{8}x + 2x^2 - 8x + 8 - x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{35}{32}x^3 - 2.375x^2 - 4.625x + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - 2\frac{6}{35}x^2 - 4\frac{8}{35}x + 8\frac{8}{35} = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 4\frac{6}{35}x^2 + 4\frac{4}{35}x + 2x^2 - 8\frac{12}{35}x + 8\frac{8}{35} = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4\frac{6}{35}x + 4\frac{4}{35}) + 2 \cdot (x^2 - 4\frac{6}{35}x + 4\frac{4}{35}) = 0$$
$$\Rightarrow (x+2) \cdot (x^2 - 4\frac{6}{35}x + 4\frac{4}{35}) = 0$$

עבור הפולינום ממעלה שנייה השורשים הם:

$$x_{1,2} = \frac{4\frac{6}{35} \pm \sqrt{17.40081633 - 16\frac{16}{35}}}{2} = \frac{4\frac{6}{35} \pm \sqrt{0.943673469}}{2} \Rightarrow x_{1,2} > 0$$

ולכן הפתרון היחיד שרלוונטי לנו הוא $x = -2$ שמתאים לערך: $y = \frac{1}{-2-2} + \frac{1}{(-2-2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{-3}{16}$ על גבי הגרף. כעת ניתן לחשב בשתי דרכים: להחסיר מהפונקציה המקורית את משוואת הישר ולעשות אינטגרל בין $x = -2$ ו-$x = 0$ (מה שנעשה), או לחשב את שטח המשולש שתחום על ידי הישר, על ידי $y = \frac{-3}{16}$ ועל ידי ציר הע בנפרד, ואת שארית השטח בנפרד.

$$S_d = \int_{-2}^{0} (\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{35x}{32} - 2)dx = |[ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - \frac{35}{64}x^2 - 2x]_{x=-2}^{0}| = |[ln(2) + \frac{1}{2} - 0 - 0 - ln(4) - \frac{1}{4} + \frac{35}{64} \cdot 4$$
$$S_d = |[ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - \frac{35}{64}x^2 - 2x]_{x=-2}^{0}| = |[ln(2) + \frac{1}{2} - 0 - 0 - ln(4) - \frac{1}{4} + \frac{35}{64} \cdot 4 + 2 \cdot (-2)]| =$$
$$S_d = |-2.255647181| = 2.255647181 \approx 2.26$$

24) א. הישר מקביל לציר הע ולכן ערכי הא של שתי הנקודות זהים. הנקודות יהיו:

$$A(x, e^{3x+2} + 10);\ B(x, 2e^{-2}x - 1) \Rightarrow AB = e^{3x+2} + 10 - (2e^{-2}x - 1) = e^{3x+2} - 2e^{-2}x + 11$$

על מנת למצוא מרחק מינימלי נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{d(AB)}{dx} = 3e^{3x+2} - \frac{2}{e^2} = 0 \Rightarrow 3e^{3x+2} = \frac{2}{e^2} \Rightarrow e^{3x+4} = \frac{2}{3} \Rightarrow ln(e^{3x+4}) = ln(\frac{2}{3}) \Rightarrow 3x + 4 = ln(\frac{2}{3})$$
$$\Rightarrow x_{ext} = \frac{1}{3} \cdot [ln(\frac{2}{3}) - 4]$$

נגזור שוב ונציב כדי לבדוק אם אכן מינימום:

$$\frac{d^2(AB)}{dx^2} = 9e^{3x+2} \Rightarrow \frac{d^2(AB)}{dx^2}(x = x_{ext}) = 9e^{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [ln(\frac{2}{3}) - 4] + 2} = 9e^{ln(\frac{2}{3}) - 2} = 9 \cdot e^{ln(\frac{2}{3})} \cdot e^{-2} = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot e^{-2} > 0$$

ולכן זה אכן האורך המינימלי. לכן משוואת הישר עם האורך המינימלי היא: $x = \frac{1}{3} \cdot [ln(\frac{2}{3}) - 4]$.

ב. כעת נחשב את המרחק הזה על ידי הצבה של הערך:

$$AB(x = x_{ext}) = e^{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [ln(\frac{2}{3}) - 4] + 2} - 2e^{-2} \cdot [\frac{1}{3} \cdot [ln(\frac{2}{3}) - 4]] + 11 = \frac{2}{3} \cdot e^{-2} - \frac{2}{3}e^{-2} \cdot [ln(\frac{2}{3}) - 4] + 11$$
$$AB(x = x_{ext}) = \frac{2}{3} \cdot e^{-2} \cdot [5 - ln(\frac{2}{3})] + 11$$

ג. הישר החדש הוא $x_{new} = \frac{1}{3} \cdot [ln(\frac{2}{3}) - 4] + 5 = \frac{1}{3} \cdot [ln(\frac{2}{3}) + 11]$ והשטח:

$$S = \int_{\frac{1}{3}\cdot[ln(\frac{2}{3})-4]}^{\frac{1}{3}\cdot[ln(\frac{2}{3})+11]} [e^{3x+2} - 2e^{-2}x + 11]dx = [\tfrac{1}{3}e^{3x+2} - e^{-2}x^2 + 11x]_{x=x_{ext}}^{x_{ext}+5}$$

$$S = \tfrac{1}{3}\cdot e^{ln(\frac{2}{3})+13} - \tfrac{1}{9e^2}\cdot[ln(\tfrac{2}{3})+11]^2 + \tfrac{11}{3}\cdot[ln(\tfrac{2}{3})+11] - \tfrac{1}{3}\cdot e^{ln(\frac{2}{3})-2} + \tfrac{1}{9e^2}\cdot[ln(\tfrac{2}{3})-4]^2 - \tfrac{11}{3}\cdot[ln(\tfrac{2}{3})-4]$$

$$S = 98314.08711 - 1.687844053 + 38.84662794 - 0.030074507 + 0.291844866 + 16.15337206$$

$$\Rightarrow S = 98367.66104 \approx 9.84\cdot 10^4$$

25) א. קודם כל, נשתמש בנגזרת הנתונה למצוא מי נקודת המינימום:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$$

כעת נגזור ונבדוק מי הוא מה:

$$f''(x) = 2x - 5 \Rightarrow f''(2) = 4 - 5 < 0 \Rightarrow maximum;\ f''(3) = 6 - 5 = 1 > 0\ minimum$$

כעת נבצע אינטגרציה:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x + C \Rightarrow f(3) = 4.5 \Rightarrow 4.5 = \tfrac{1}{3}\cdot 3^3 - \tfrac{5}{2}\cdot 3^2 + 6\cdot 3 + C$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x \Rightarrow f(2) = 4\tfrac{2}{3}$$

$$\Rightarrow maximum:\ (2, 4\tfrac{2}{3});\quad minimum:\ (3, 4.5)$$

ב. כעת בשביל נקודות הקיצון של $g(x)$ נשווה את $f(x)$ לאפס:

$$f(x) = g'(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x\cdot(x^2 - \tfrac{15}{2}x + 18) = 0$$

נפתור את הפולינום הימני:

$$x_{1,2} = \tfrac{7.5\pm\sqrt{56.25-72}}{2} = \tfrac{7.5\pm\sqrt{-15.75}}{2}$$

אלו לא תוצאות ממשיות ולכן אנו נשארים רק עם $x = 0$. לפי הניסוח של השאלה אפשר להבין שזאת נקודת מינימום. הצבה ב$f'(x)$ תביא אותנו לאותה מסקנה:

$$f'(0) = g''(0) = 0 - 0 + 6 > 0 \Rightarrow minimum$$

ועכשיו לחישוב ערך הע:

$$5 = \sqrt{3^2 + (4.5 - y_{min})^2} \Rightarrow 25 = 9 + (4.5 - y_{min})^2 \Rightarrow 16 = (4.5 - y_{min})^2 \Rightarrow \pm 4 = 4.5 - y_{min}$$

$$y_{min,1} = 4.5 + 4 = 8.5;\quad y_{min,2} = 4.5 - 4 = 0.5$$

אזי האפשרויות הן: אפשרות אחת: $min:\ (0, 0.5)$.

אפשרות 2: $min:\ (0, 8.5)$.

26) א. נחלק את הפונקציה הנתונה לשני תחומים:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + x + 3 & x \geq 0 \\ x^2 - 5x - x + 3 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \\ x^2 - 6x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

נפתור את שני הפולינומים כדי למצוא את נקודות הקיצון:

$$x \geq 0\ and\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x \geq 0\ and\ (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

$x < 0 \; and \; x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x < 0 \; and \; x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} > 0 \Rightarrow No \; solution$

נציב ערכים בנגזרת לבדוק מה האופי של נקודות הקיצון:

$f'(0.5) = 0.25 - 2 + 3 = 1.25 > 0; \; f'(2) = 4 - 8 + 3 = -1 < 0; \; f'(4) = 16 - 16 + 3 = 3 > 0$

לכן נקודת המינימום היא ב $x = 3$ והמקסימום ב $x = 1$. כעת נבצע אינטגרציה לכל אחד מהתחומים:

$$\int (x^2 - 4x + 3)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + C$$

$$\int (x^2 - 6x + 3)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + C$$

כאשר הקבוע אותו קבוע על מנת לקיים רציפות. נציב בעליון x=3 ונבדוק עבור איזה C נקבל y=0:

$\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + C = 0 \Rightarrow 9 - 18 + 3 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

שיעור הע של נקודת המינימום נתון. עבור נקודת המקסימום:

$f(x=1) = \frac{1}{3} \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1\frac{1}{3}$

הפונקציה $f(x)$ היא

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \cdot |x| + 3x$

ונקודות הקיצון שלה הן: $minimum : (3,0); \quad maximum : (1, \frac{4}{3})$.

ב. נקבל עבור $g(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \ge 0 \\ x^2 - 6x & x < 0 \end{cases}$$

נפתור את שני הפולינומים כדי למצוא את נקודות הקיצון:

$x \ge 0 \; and \; x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \ge 0 \; and \; x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$

$x < 0 \; and \; x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x < 0 \; and \; x(x-6) = 0 \Rightarrow No \; solution$

נציב ערכים בנגזרת לבדוק מה האופי של נקודות הקיצון:

$f'(-1) = 1 + 6 = 7 > 0; \; f'(1) = 1 - 4 = -3 < 0; \; f'(5) = 25 - 20 = 5 > 0$

לכן נקודת המינימום היא ב $x = 4$ והמקסימום ב $x = 0$. כעת נבצע אינטגרציה לכל אחד מהתחומים:

$$\int (x^2 - 4x)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + D$$

$$\int (x^2 - 6x)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + D$$

כאשר הקבוע אותו קבוע על מנת לקיים רציפות. נבדוק מה צריכים להיות ערכי הע האפשריים של נקודת המינימום כדי לקיים את התנאי:

$\sqrt{5} = \sqrt{(4-3)^2 + (y_{min} - 0)^2} \Rightarrow 5 = 1 + y_{min}^2 = 4 \Rightarrow y_{min} = \pm 2$

אפשרות ראשונה, $y_{min} = 2$:

$\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + D = 2 \Rightarrow \frac{64}{3} - 32 + D = 2 \Rightarrow D_1 = 12\frac{2}{3}$

ועבור נקודת המקסימום:

$g(0) = 0 - 0 + 12\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}$

הפונקציה $g(x)$ היא

$g_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \cdot |x| + 12\frac{2}{3}$

ונקודות הקיצון שלה הן: $minimum : (4,2)$; $maximum : (0,12\frac{2}{3})$

אפשרות שנייה, $y_{min} = -2$:

$\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + D = -2 \Rightarrow \frac{64}{3} - 32 + D = 2 \Rightarrow D_2 = 8\frac{2}{3}$

ועבור נקודת המקסימום:

$g(0) = 0 - 0 + 12\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$

הפונקציה $g(x)$ היא

$g_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \cdot |x| + 8\frac{2}{3}$

ונקודות הקיצון שלה הן: $minimum : (4,2)$; $maximum : (0,8\frac{2}{3})$

27) א. תחום ההגדרה הוא $x \neq \pm 5$.

ב. נפשט את הפונקציה:

$f(x) = \frac{(x-3)^2-2}{x^2-25} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{x^2-6x+9-2}{(x+5)\cdot(x-5)} + \frac{x-5}{x+5} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-6x+7+x^2-10x+25}{(x+5)\cdot(x-5)} = \frac{2x^2-16x+32}{(x+5)\cdot(x-5)} = \frac{2\cdot(x^2-8x+16)}{(x+5)\cdot(x-5)} = \frac{2\cdot(x-4)^2}{(x+5)\cdot(x-5)}$

נקודת החיתוך עם ציר הx

$0 = \frac{2\cdot(x-4)^2}{(x+5)\cdot(x-5)} \Rightarrow x = 4$

ועם ציר הy

$f(x=0) = \frac{2\cdot(-4)^2}{5\cdot(-5)} = \frac{-32}{25} = -1.28$

ולכן נקודות החיתוך עם הצירים: $(4,0)$; $(0,-1.28)$.

ג. נגזור ונשווה לאפס:

$f'(x) = 2 \cdot \frac{2\cdot(x-4)\cdot(x^2-25)-2x\cdot(x-4)^2}{(x^2-25)^2} = 4 \cdot \frac{x^3-4x^2-25x+100-x^3+8x^2-16x}{(x^2-25)^2} = 4 \cdot \frac{4x^2-41x+100}{(x^2-25)^2}$

$\Rightarrow 4 \cdot \frac{4x^2-41x+100}{(x^2-25)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 41x + 100 = 0 \Rightarrow x^2 - 10.25x + 25 = 0 \Rightarrow (x-6.25)\cdot(x-4) = 0$

קיבלנו $x_1 = 4,\ x_2 = 6.25$. נציב ערכים בנגזרת לראות מי מינימום מי מקסימום:

$f'(0) = 4 \cdot \frac{100}{25^2} > 0; \quad f'(6) = 4 \cdot \frac{4\cdot36-41\cdot6+100}{(36-25)^2} = \frac{-215}{121} < 0; \quad \Rightarrow f'(10^{100}) = 4 \cdot \frac{4\cdot10^{200}-41\cdot10^{100}+100}{(10^{100}-25)^2} > 0$

כלומר יש נקודת מקסימום בx=4 ונקודת מינימום בx=6.25. נמצא את ערכי הy שלהן. עבור x=4 כבר מצאנו שזה החיתוך עם ציר הx. נחשב עבור x=6.25:

$f(x=6.25)=\frac{2\cdot(6.25-4)^2}{(6.25^2-25)}=0.72$

נקודות הקיצון: $(6.25,0.72)$: $minimum$;$(4,0)$: $maximum$.

ד. האסימפטוטות שמקבילות לציר הy הן פשוט $x=\pm 5$. נשאיף את x לאינסוף ומינוס אינסוף ונראה מה הערך אליו הוא שואף:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{2\cdot(x-4)^2}{(x+5)\cdot(x-5)}]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{2\cdot(1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2})}{1-\frac{25}{x^2}}]=2\cdot\frac{1\mp0+0}{1-0}=2$$

כלומר יש אסימפטוטה אופקית כשx שואף לאינסוף ומינוס אינסוף ב$y=2$.

ה.נגזור שוב ונשווה לאפס:

$$f''(x)=4\cdot\frac{(8x-41)\cdot(x^2-25)^2-2\cdot2x\cdot(x^2-25)\cdot(4x^2-41x+100)}{(x^2-25)^4}=4\cdot\frac{(8x-41)\cdot(x^2-25)-2\cdot2x\cdot(4x^2-41x+100)}{(x^2-25)^3}=0,$$

$$(8x-41)\cdot(x^2-25)-2\cdot2x\cdot(4x^2-41x+100)=0$$

$$\Rightarrow 8x^3-41x^2-200x+1025-16x^3+164x^2-400x=0 \Rightarrow 8x^3-123x^2+600x-1025=0$$

$$\Rightarrow x^3-15\tfrac{3}{8}x^2+75x-128\tfrac{1}{8}=0$$

$$\Rightarrow x^3-7.36906211x^2+16.00374644x-8.00593789x^2+58.99625356x-128\tfrac{1}{8}=0$$

$$\Rightarrow (x-8.00593789)\cdot(x^2-7.36906211x+16.00374644)=0$$

נפתור עבור הפולינום הימני:

$$x_{1,2}=\frac{7.37\pm\sqrt{54.30307638-64.01498576}}{2}=\frac{7.37\pm\sqrt{-9.71190938}}{2}$$

אבל זה לא ממשי. כלומר הנקודה היחידה שחשודה לפיתול היא $x=8.00593789\approx 8.01$. נציב לפני ואחרי לבדיקה:

$$f''(8)=4\cdot\frac{1447-896}{39^3}>0;\quad f''(9)=4\cdot\frac{1736-1980}{56^3}<0$$

וערך הy של נקודה זאת: $0.820950062\approx 0.82$.

יש לנו נקודת פיתול אחת של מעבר מקעור לקמור והיא: $(8.01,\ 0.82)$.

28) א. תחום הגדרת הפונקציה הוא: כל x ממשי.

ב. ראשית נשווה את y לאפס:

$$8sin(x)+cos(x)=0 \Rightarrow 8sin(x)=\ -cos(x)$$

ניתן לחלק בקוסינוס כי בערכים הרלוונטיים הקוסינוס לא יתאפס:

$$tan(x)=\frac{-1}{8} \Rightarrow x=\ -0.124354994+n\cdot\pi$$

כאשר n מספר שלם. אלו כל הx-ים עבורם $y=0$, נקודות החיתוך עם ציר הx. כעת בשביל נקודת החיתוך עם ציר הy נציב $x=0$:

$$y=8\cdot0+1=1$$

כלומר, $(0,1)$ היא נקודת החיתוך עם ציר הy.

ג. נגזור את הפונקצייה:

$y' = 8cos(x) - sin(x)$

כעת נשווה לאפס.

$8cos(x) - sin(x) = 0 \Rightarrow sin(x) = 8cos(x)$

גם כאן ניתן לחלק בקוסינוס כי בערכים הרלוונטיים הקוסינוס לא יתאפס:

$tan(x) = 8 \Rightarrow x = 1.446441332 + n \cdot \pi$

כאשר n מספר שלם. נבדוק אלו נקודות בתחום הנ"ל ונגזור שוב לאחר מכן:

$x_{extreme} = \; -4.836743975, \; -1.695151321, \; 1.446441332, \; 4.588033986$

$x_{extreme} \approx \; -4.84, \; -1.70, \; 1.45, \; 4.59$

$\Rightarrow y'' = \; -8sin(x) - cos(x) = \; -y$

נציב את הנקודות:

$y''(-4.84) = \; -8.062257748; \; y''(-1.70) = 8.062257748; \; y''(1.45) = \; -8.062257748$

$y''(4.59) = 8.062257748$

ונחשב את ערכי הע (שזה פשוט מינוס הנגזרת השנייה).

נקודות המקסימום: $(1.45, 8.06); \; (-4.84, 8.06)$.

נקודות המינימום: $(4.59, -8.06); \; (-1.70, -8.06)$.

ד. תחומי העלייה:

$-2\pi \le x < -4.84; \; -1.70 < x < 1.45; \; 4.59 < x \le 2\pi$

תחומי הירידה:

$-4.84 < x - 1.70; \; 1.45 < x < 4.59$

29) א. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: כל x ממשי.

ב. נכתוב את הפונקציה בצורה יותר מצומצמת: $f(x) = 3e^{x+1} + 27e^{1-x} - 18e$. ראשית נשווה זאת לאפס:

$0 = 3e^{x+1} + 27e^{1-x} - 18e \Rightarrow 3e^{2x+1} - 18e \cdot e^x + 27e = 0 \Rightarrow 3e \cdot (e^x)^2 - 18e \cdot e^x + 27e = 0$

נסמן: $t = e^x$ כאשר $t > 0$ ונחלק ב3e:

$\Rightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Rightarrow (t-3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = ln(3)$

אזי, נקודת החיתוך עם ציר הx: $(ln(3), 0)$.

כעת נציב x=0:

$f(x=0) = 3e^{0+1} + 27e^{1-0} - 18e = 12e$

אזי, נקודת החיתוך עם ציר הy: $(0, 12e)$.

ג. נגזור ונשווה לאפס:

$\frac{df}{dx} = 3e^{x+1} - 27e^{1-x} \Rightarrow \frac{df}{dx} = 0 = 3e^{x+1} - 27e^{1-x} \Rightarrow 9e^{-x} = e^x \Rightarrow e^{2x} = 9 \Rightarrow 2x = ln(9)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot ln(9) = ln(9^{\frac{1}{2}}) = ln(3)$

נגזור שוב ונבדוק את סוג נקודת הקיצון:

$\frac{d^2f}{dx^2} = 3e^{x+1} + 27e^{1-x} \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}(x = ln(3)) = 3e^{ln(3)+1} + 27e^{1-ln(3)} = 3e \cdot e^{ln(3)} + 27e \cdot \frac{1}{e^{ln(3)}}$

$= 3e \cdot 3 + 27e \cdot \frac{1}{3} = 9e + 9e = 18e > 0$

ולכן זוהי נקודת מינימום. אנו יודעים כבר לפי ערך האיקס שזאת נקודת החיתוך עם ציר האיקס.

כלומר, יש לפונקציה נקודת מינימום ב: $(ln(3), 0)$.

ד.

$S = \int_{-4}^{12} (3e^{x+1} + 27e^{1-x} - 18e)dx = [3e^{x+1} - 27e^{1-x} - 18e \cdot x]_{x=-4}^{12} = [3e^{13} - 27e^{-11} - 216e - 3e^{-3} + 27e^{5} - 72e]$

$S = [1327240.176 - 4.509459213 \cdot 10^{-4} - 587.1488749 - 0.149361205 + 4007.155296 - 195.7162916]$

$S = 1330464.316 \approx 1.33 \cdot 10^{6}$

30) א. תחום ההגדרה של הפונקציה:

$2x - 1 > 0 \ and \ x > 0 \ and \ 2 - x > 0 \Rightarrow x > 0.5 \ and \ x > 0 \ and \ x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

ב. נפשט את הפונקציה:

$f(x) = ln(x^5) + ln(2x-1) - ln(x^3) - ln(x) + ln(2-x) = 5ln(x) + ln(2x-1) - 3ln(x) - ln(x) + ln(2-x)$

$f(x) = ln(x) + ln(2x-1) + ln(2-x)$

כעת נשווה לאפס:

$0 = ln(x) + ln(2x-1) + ln(2-x) \Rightarrow e^0 = e^{ln(x)+ln(2x-1)+ln(2-x)} \Rightarrow 1 = x \cdot (2x-1) \cdot (2-x)$

$\Rightarrow 1 = x \cdot (4x - 2 - 2x^2 + x) \Rightarrow 1 = -2x^3 + 5x^2 - 2x \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^3 - 3x^2 - x - 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (2x^2 - 3x - 1) = 0$

נפתור את הפולינום הימני:

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

אבל צריך גם להתאים לתחום ההגדרה. לכן נקודות החיתוך עם ציר הx:

$(1, 0), \ (\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 0)$

ציר הy לא רלוונטי מכיוון שזה מחוץ תחום ההגדרה.

ג.

$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{2-x}$

נשווה לאפס:

$\frac{-2x^2+5x-2}{x \cdot (2x-1) \cdot (2-x)} + \frac{2 \cdot (2x - x^2)}{x \cdot (2x-1) \cdot (2-x)} - \frac{(2x^2 - x)}{x \cdot (2x-1) \cdot (2-x)} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 5x - 2 + 4x - 2x^2 - 2x^2 + x = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 10x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-48}}{12} = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$

היחיד בתחום הגדרה הוא $x=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}$. נגזור שוב ונבדוק אם מקסימום או מינימום:

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{-1}{x^2}+\frac{0-2\cdot2}{(2x-1)^2}-\frac{0-1\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{-1}{x^2}-\frac{4}{(2x-1)^2}-\frac{1}{(2-x)^2}\Rightarrow f''(x=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6})=...=\ -4.756189484<0$$

אז זאת נקודת מקסימום. מכאן נסיק את תחומי העלייה והירידה.

תחום העלייה: $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}$.

תחום הירידה: $\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}<x<2$.

ד.

$$S=|\int_1^{1.5}f''(x)dx|=|[f'(x)]_{x=1}^{1.5}|=|[\frac{1}{x}+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{2-x}]_{x=1}^{1.5}|=|[\frac{2}{3}+1-2-1-2+\frac{1}{2}]|=|-2\frac{5}{6}|=2\frac{5}{6}$$