11)א.

$sin(150^{\circ}) \cdot cos(120^{\circ}) - sin(60^{\circ}) \cdot cos(30^{\circ}) = sin(150^{\circ}) \cdot cos(120^{\circ}) + sin(120^{\circ}) \cdot cos(150^{\circ})$

מתאים לזהות של $sin(\theta + \varphi) = sin(\theta)cos(\varphi) + cos(\theta)sin(\varphi)$:

$\Rightarrow sin(150^{\circ} + 120^{\circ}) = sin(270^{\circ}) = \ -1$

ב.

$sin^2(\frac{2\pi}{3})cot^2(\frac{2\pi}{3}) - cos^2(\frac{4\pi}{3})tan^2(\frac{4\pi}{3}) = sin^2(\frac{2\pi}{3}) \cdot \frac{cos^2(\frac{2\pi}{3})}{sin^2(\frac{2\pi}{3})} - cos^2(\frac{4\pi}{3}) \cdot \frac{sin^2(\frac{4\pi}{3})}{cos^2(\frac{4\pi}{3})}$

$\Rightarrow cos^2(\frac{2\pi}{3}) - sin^2(\frac{4\pi}{3}) = cos^2(\frac{2\pi}{3}) - (sin(\pi - \frac{4\pi}{3}))^2 = cos^2(\frac{2\pi}{3}) - (sin(\frac{-\pi}{3}))^2$

$= cos^2(\frac{2\pi}{3}) - (-sin(\pi - \frac{\pi}{3}))^2 = cos^2(\frac{2\pi}{3}) - sin^2(\frac{2\pi}{3}) = cos(\frac{4\pi}{3}) = \ -cos(\pi - \frac{4\pi}{3}) = \ -cos(\frac{-\pi}{3})$

$= \ -\frac{1}{2}$

ג.

$\frac{1}{tan(150^{\circ})} + \frac{sin(240^{\circ})}{1+cos(30^{\circ})} = cot(150^{\circ}) + \frac{sin(180^{\circ}-240^{\circ})}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = tan(90^{\circ} - 150^{\circ}) + \frac{sin(-60^{\circ})}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = tan(-60^{\circ}) + \frac{sin(-60^{\circ})}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{-sin(60^{\circ})}{cos(60^{\circ})} - 2 \cdot \frac{sin(60^{\circ})}{2+\sqrt{3}} = \frac{-sin(60^{\circ})}{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{sin(60^{\circ})}{2+\sqrt{3}} = \ -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\sqrt{3}} = \ -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}-3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$= \ -3 \cdot (\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}})$

ד. $tan(\alpha) = \frac{2}{5} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{1}{cot(\alpha)}$

$cot(\alpha) = \frac{5}{2};$

$\frac{2}{5} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} \Rightarrow \frac{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}}{cos(\alpha)} = \frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \frac{2}{5}cos(\alpha) \Rightarrow 1 - cos^2(\alpha) = \frac{4}{25}cos^2(\alpha) \Rightarrow \frac{29}{25}cos^2(\alpha) = 1$

$cos^2(\alpha) = \frac{25}{29} \Rightarrow cos(\alpha) =+ \frac{5}{\sqrt{29}}$

כאשר נלקחה רק התשובה החיובית בגלל הטווח הנתון. כעת נותר:

$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow sin^2(\alpha) = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29} \Rightarrow sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{29}}$

כאשר נלקחה רק התשובה החיובית בגלל הטווח הנתון.

ה. $cos(\alpha) = \frac{4}{7}$

$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow sin^2(\alpha) = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49} \Rightarrow sin(\alpha) = \ -\frac{\sqrt{33}}{7}$

כאשר נלקחה רק התשובה השלילית בגלל הטווח הנתון.

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{-\frac{\sqrt{33}}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{-\sqrt{33}}{4}$

$cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} = \frac{-4}{\sqrt{33}}$

12)א.

$sin(x + \frac{\pi}{3}) = sin(2x) \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2x + 2\pi k \ or \ x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + 2\pi k$

כאשר k שלם.

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \ or \ 3x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \ or \ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$

ב.

$cos(x+45^\circ) = cos(3x-30^\circ) \Rightarrow x+45^\circ = 3x-30^\circ+360^\circ k \ or \ x+45^\circ = -3x+30^\circ+360^\circ k$

כאשר k שלם.

$\Rightarrow 2x = 75^\circ + 360^\circ k \ or \ 4x = -15^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 37.5^\circ + 180^\circ k \ or \ x = -3.75^\circ + 90^\circ k$

ג.

$cos^2(x) = 1 - sin(x) \Rightarrow 1 - sin^2(x) = 1 - sin(x) \Rightarrow 0 = sin^2(x) - sin(x) = sin(x)\cdot(sin(x)-1)$

$\Rightarrow sin(x) = 0 \ or \ sin(x) = 1 \Rightarrow x = \pi k \ or \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

כשk שלם.

ד.

$6sin^3(x) = 3sin(x) \Rightarrow 2sin^3(x) - sin(x) = 0 \Rightarrow sin(x)\cdot(2sin^2(x)-1) = 0$

$\Rightarrow sin(x) = 0 \ or \ sin^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi k \ or \ sin^2(x) - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi k \ or \ (sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2})(sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow$

$x = \pi k \ or \ x = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k \ or \ x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \ or \ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \ or \ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \pi k \ or \ x = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k \ or \ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \ or \ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \ or \ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

ואפשר את ארבע התשובות הימניות לאחד לשתי תשובות:

$x = \pi k \ or \ x = \frac{-\pi}{4} + \pi k \ or \ x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

13) א. נבטא את a_1 באמצעות d:

$a_4 = 5\cdot d \Rightarrow a_1 = a_4 - 3\cdot d = 2\cdot d$

כעת נשתמש בנוסחה $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$:

$S_{11} = 385 = \frac{2\cdot 2d + d\cdot 10}{2}\cdot 11 = 77d \Rightarrow d = \frac{385}{77} = 5$

וזה ההפרש של הסדרה. האיבר הראשון: $a_1 = 2d = 10$. עבור הסכום נשתמש באותה נוסחה:

$S_{24} = \frac{2\cdot 10 + 5\cdot 23}{2}\cdot 24 = 67.5\cdot 24 = 1620$

ב. נשתמש בנוסחה $S_n = \frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$ ונגיע לשתי משוואות עם a_1, q כנעלמים:

$S_8 = 16400 = \frac{a_1\cdot(q^8-1)}{q-1}$

$S_6 = 28\cdot S_3 \Rightarrow \frac{a_1\cdot(q^6-1)}{q-1} = 28\cdot\frac{a_1\cdot(q^3-1)}{q-1} \Rightarrow q^6 - 1 = 28q^3 - 28$

$\Rightarrow q^6 - 28q^3 + 27 = 0$

נסמן $q^3 = t$:

$\Rightarrow t^2 - 28t + 27 = 0 \Rightarrow (t-1)\cdot(t-27) = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \ or \ t_2 = 27 \Rightarrow q^3 = 1 \ or \ q^3 = 27$

נפסול את התוצאה שבה מתקבל $q=1$ כי זה סותר את הגדרת הסדרה ההנדסית בה $q\neq 1$.
ולכן נקבל כי $q=3$ וזאת המנה של הסדרה. כעת נציב זאת בנתון השני:

$$16400 = a_1 \cdot \frac{3^8-1}{3-1} = 3280a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{16400}{3280} = 5$$

כעת נחשב את הסכום המבוקש:

$$S_{12} = \frac{a_1\cdot(q^{12}-1)}{q-1} = \frac{5\cdot(3^{12}-1)}{3-1} = 1328600$$

ג.

ראשית נבטא את האיברים שמהווים סדרה הנדסית בעזרת a_1,d ונראה את הקשר ביניהם:

$$a_3 = a_1+2d;\ \ a_{10}=a_1+9d;\ \ \ a_{38}=a_1+37d$$

והם איברים עוקבים בסדרה הנדסית כלומר:

$$\frac{a_1+9d}{a_1+2d} = \frac{a_1+37d}{a_1+9d} \Rightarrow (a_1+9d)^2 = (a_1+2d)\cdot(a_1+37d)$$

$$a_1^2+18a_1d+81d^2 = a_1^2+2a_1d+37a_1d+74d^2 \Rightarrow 7d^2-21a_1d=0 \Rightarrow 7d\cdot(d-3a_1)=0$$

אבל בסדרה חשבונית $d\neq 0$ ולכן $d=3a_1$.

כעת נשתמש בנתון השני למצוא קשר נוסף:

$$S_{12} = 210 = \frac{2a_1+11d}{2}\cdot 12 = 6\cdot(2a_1+11d) = 12a_1+66d$$

נציב מה שמצאנו מקודם:

$$210 = 12a_1+66\cdot 3a_1 = 210a_1 \Rightarrow a_1=1;\quad d=3\cdot 1=3$$

כעת נחשב את הסכום המבוקש:

$$S_{52} = \frac{2a_1+51d}{2}\cdot 52 = \frac{2+153}{2}\cdot 52 = 4030$$

14)א. ראשית, נראה נכונות עבור $n=1$:

$$n=1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16} = 2-\frac{2\cdot1+1}{2^{4\cdot1-1}} \Rightarrow 1\frac{5}{8} = 2-\frac{3}{8} = 1\frac{5}{8}$$

כעת נניח נכונות עבור $n=k$:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{4k}{2^{4k}} = 2-\frac{2k+1}{2^{4k-1}}$$

נוכיח נכונות עבור $n=k+1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{4k}{2^{4k}}+\frac{4k+1}{2^{4k+1}}+\frac{4k+2}{2^{4k+2}}+\frac{4k+3}{2^{4k+3}}+\frac{4k+4}{2^{4k+4}} = 2-\frac{2k+2+1}{2^{4k+4-1}}$$

נשתמש בהנחה:

$$2-\frac{2k+1}{2^{4k-1}}+\frac{4k+1}{2^{4k+1}}+\frac{4k+2}{2^{4k+2}}+\frac{4k+3}{2^{4k+3}}+\frac{4k+4}{2^{4k+4}} = 2-\frac{2k+2+1}{2^{4k+4-1}}$$

$$\Rightarrow -\frac{2k+1}{2^{4k-1}}+\frac{4k+1}{2^{4k+1}}+\frac{4k+2}{2^{4k+2}}+\frac{4k+3}{2^{4k+3}}+\frac{4k+4}{2^{4k+4}} = -\frac{2k+3}{2^{4k+3}}$$

$$\Rightarrow -2^{4k+4}\cdot\frac{2k+1}{2^{4k-1}}+2^{4k+4}\cdot\frac{4k+1}{2^{4k+1}}+2^{4k+4}\cdot\frac{4k+2}{2^{4k+2}}+2^{4k+4}\cdot\frac{4k+3}{2^{4k+3}}+2^{4k+4}\cdot\frac{4k+4}{2^{4k+4}} = -2^{4k+4}\cdot\frac{2k+3}{2^{4k+3}}$$

$$\Rightarrow -32\cdot(2k+1)+8\cdot(4k+1)+4\cdot(4k+2)+2\cdot(4k+3)+4k+4 = -2\cdot(2k+3)$$

$$\Rightarrow -64k-32+32k+8+16k+8+8k+6+4k+4 = -4k-6$$

$$\Rightarrow -64k+32k+16k+8k+4k+4k = 32-8-8-6-4-6 \Rightarrow 0=0$$

פסוק אמת. ולכן, $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{4n}{2^{4n}}=2-\frac{2n+1}{2^{4n-1}}$ מתקיים עבור כל n טבעי.

ב. נשים לב כי:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{32}{2^{32}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{4\cdot 8}{2^{4\cdot 8}}=2-\frac{2\cdot 8+1}{2^{4\cdot 8-1}}$$

אם מתוך זה נחסיר את:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{12}{2^{12}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{4\cdot 3}{2^{4\cdot 3}}=2-\frac{2\cdot 3+1}{2^{4\cdot 3-1}}$$

נקבל:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{32}{2^{32}}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{12}{2^{12}}\right)=\frac{13}{2^{13}}+\frac{14}{2^{14}}+...+\frac{32}{2^{32}}=2-\frac{2\cdot 8+1}{2^{4\cdot 8-1}}-\left(2-\frac{2\cdot 3+1}{2^{4\cdot 3-1}}\right)$$

$$\frac{13}{2^{13}}+\frac{14}{2^{14}}+...+\frac{32}{2^{32}}=\frac{2\cdot 3+1}{2^{4\cdot 3-1}}-\frac{2\cdot 8+1}{2^{4\cdot 8-1}}=\frac{7}{2048}-\frac{17}{2147483648}=3.417960834\cdot 10^{-3}\approx 3.42\cdot 10^{-3}$$

15) א. ראשית, נראה נכונות עבור $n=1$:

$$3^2<2^2(2^2-1)\Rightarrow 9<4\cdot(4-1)\Rightarrow 9<4\cdot 3\Rightarrow 9<12$$

כעת נניח נכונות עבור $n=k$:

$$3^{2k}<2^{2k}(2^{2k}-1)$$

נוכיח נכונות עבור $n=k+1$:

$$3^{2k+2}<2^{2k+2}(2^{2k+2}-1)\Rightarrow 9\cdot 3^{2k}<4\cdot 2^{2k}(2^{2k+2}-1)$$

נציב את ההנחה:

$$9\cdot 3^{2k}<9\cdot 2^{2k}(2^{2k}-1)<^{*}???^{*}4\cdot 2^{2k}(2^{2k+2}-1)$$

נבדוק האם יתקיים:

$$9\cdot 2^{2k}(2^{2k}-1)<4\cdot 2^{2k}(2^{2k+2}-1)\Rightarrow 9\cdot 2^{2k}-9<4\cdot 2^{2k}\cdot 2^2-4\Rightarrow 9\cdot 2^{2k}-9<16\cdot 2^{2k}-4$$
$$\Rightarrow -5<7\cdot 2^{2k}$$

וזה אכן נכון עבור כל k טבעי, שכן עבור k טבעי אגף ימין של אי השיוויון חיובי, ולכן תמיד יהיה גדול ממספר שלילי. ולכן עבור כל n טבעי מתקיים

$$3^{2n}<2^{2n}(2^{2n}-1)$$

ב.ראשית, נראה נכונות עבור $n=1$:

$$1+2=2^2-1\Rightarrow 3=4-1=3$$

כעת נניח נכונות עבור $n=k$:

$$1+2+4+...+2^{2k-1}=2^{2k}-1$$

נוכיח נכונות עבור $n=k+1$:

$$1+2+4+...+2^{2k+2-1}=2^{2k+2}-1$$
$$1+2+4+...+2^{2k-1}+2^{2k}+2^{2k+1}=2^{2k+2}-1$$

כעת נציב את ההנחה:

$$2^{2k}-1+2^{2k}+2^{2k+1}=2^{2k+2}-1\Rightarrow 2\cdot 2^{2k}+2^{2k+1}=2^{2k+2}\Rightarrow 2^{2k+1}+2^{2k+1}=2^{2k+2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2k+1} = 2^{2k+2} \Rightarrow 2^{2k+2} = 2^{2k+2}$$

פסוק אמת, ולכן עבור כל n טבעי מתקיים

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^{2n-1} = 2^{2n} - 1$$

ג. הוכחנו בסעיף א' כי מתקיים:

$$3^{2n} < 2^{2n}(2^{2n} - 1) \Rightarrow 2^{2n} - 1 > \frac{3^{2n}}{2^{2n}} \Rightarrow 2^{2n} - 1 > (\frac{3}{2})^{2n}$$

בסעיף ב' הוכחנו:

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^{2n-1} = 2^{2n} - 1$$

אם נציב האחד בשני נקבל:

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^{2n-1} = 2^{2n} - 1 > (\frac{3}{2})^{2n} \Rightarrow 1 + 2 + 4 + ... + 2^{2n-1} > (\frac{3}{2})^{2n}$$

16)א. $(x^2+3)^2$. במקרה של פונקציה מורכבת $\frac{d}{dx}(g(f(x)) = \frac{dg(f)}{df} \cdot \frac{df}{dx}$:

$$\frac{d}{dx}(x^2+3)^2 = 2 \cdot (x^2+3) \cdot 2x = 4x \cdot (x^2+3)$$

ב. $\frac{4x+5}{3-2x}$.במקרה של מנה $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$\frac{d}{dx}(\frac{4x+5}{3-2x}) = \frac{4\cdot(3-2x)-(4x+5)\cdot(-2)}{(3-2x)^2} = \frac{12-8x+8x+10}{(3-2x)^2} = \frac{22}{(3-2x)^2}$$

ג. $x^2 \cdot tan(x)$ במקרה של מכפלה $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cdot tan(x)) = 2x \cdot tan(x) + x^2 \cdot \frac{1}{cos^2(x)} = \frac{2x \cdot sin(x)}{cos(x)} + \frac{x^2}{cos^2(x)} = \frac{2x \cdot sin(x) \cdot cos(x) + x^2}{cos^2(x)} = \frac{xsin(2x)+x^2}{cos^2(x)} = x \cdot (\frac{sin(2x)+x}{cos^2(x)})$$

ד. $cot^2(x)$. גם כאן נתייחס לזה כפונקציה מורכבת:

$$\frac{d}{dx}(cot^2(x)) = 2 \cdot cot(x) \cdot \frac{d}{dx}cot(x) = 2 \cdot \frac{cos(x)}{sin(x)} \cdot \frac{-1}{sin^2(x)} = \frac{-2cos(x)}{sin^3(x)}$$

ה. 3^{5x+3} במקרה של פונקציה מעריכית: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot lna$, ויש כאן גם פונקציה מורכבת:

$$\frac{d}{dx}[3^{5x+3}] = 3^{5x+3} \cdot ln(3) \cdot 5 = 5ln(3) \cdot 3^{5x+3}$$

17) א.

$$f(x) = x^4 + 5x^2 - x + 8 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 4x^3 + 10x - 1 \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 12x^2 + 10$$

ב.

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{2x^2} + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{(-2x)\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{1}{x^3} + \frac{(-2x)\cdot(x^4+2x^2+1)-4x\cdot(1-x^4)}{(x^2+1)^4} = \frac{1}{x^3} - 2x \cdot \frac{x^4+2x^2+1+2-2x^4}{(x^2+1)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{x^3} + 2x \cdot \frac{x^4-2x^2-3}{(x^2+1)^4}$$

ג.

$$f(x) = sin(2x+4) + x \cdot cos(x-1) \Rightarrow \frac{df}{dx} = cos(2x+4) \cdot 2 + cos(x-1) + x \cdot (-sin(x-1))$$
$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 2cos(2x+4) + cos(x-1) - x \cdot sin(x-1)$$
$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -2sin(2x+4) \cdot 2 - sin(x-1) - sin(x-1) - x \cdot cos(x-1)$$
$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = -4sin(2x+4) - 2sin(x-1) - x \cdot cos(x-1)$$

ד.

$$f(x) = e^{2x} + ln(x+4) \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2e^{2x} + \frac{1}{x+4} \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 4e^{2x} - \frac{1}{(x+4)^2}$$

ה.

$$f(x) = sinh(x) \cdot sin(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = cosh(x) \cdot sin(x) + sinh(x) \cdot cos(x)$$
$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = sinh(x) \cdot sin(x) + cosh(x) \cdot cos(x) + cosh(x) \cdot cos(x) - sinh(x) \cdot sin(x) = 2 \cdot cosh(x) \cdot cos(x)$$

18) א.

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^3-1} + 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{2x \cdot (x^3-1) - (x^2+4) \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} + \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{2x^4 - 2x - 3x^4 - 12x^2}{(x^3-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{x^4+12x^2+2x}{(x^3-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ב.

$$f(x) = \frac{(x^{\frac{3}{2}}-3) \cdot \sqrt{x}}{x+\frac{1}{x}} = \frac{x^2-3\sqrt{x}}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^3-3x^{\frac{3}{2}}}{x^2+1} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{(3x^2-\frac{9}{2} \cdot \sqrt{x}) \cdot (x^2+1) - (x^3-3x^{\frac{3}{2}}) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-\frac{9}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{9}{2}\sqrt{x}-2x^4-6x^{\frac{5}{2}}}{(x^2+1)^2}$$
$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{x^4+3x^2-\frac{21}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{9}{2}\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}$$

ג.

$$f(x) = (sin^2(x) + x \cdot cos(x)) \cdot \sqrt{x+4}$$
$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = (2sin(x)cos(x) + cos(x) - x \cdot sin(x)) \cdot \sqrt{x+4} + (sin^2(x) + x \cdot cos(x)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$
$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{(2sin(x)cos(x)+cos(x)-x \cdot sin(x)) \cdot (x+4) + (sin^2(x)+x \cdot cos(x))}{2\sqrt{x+4}}$$

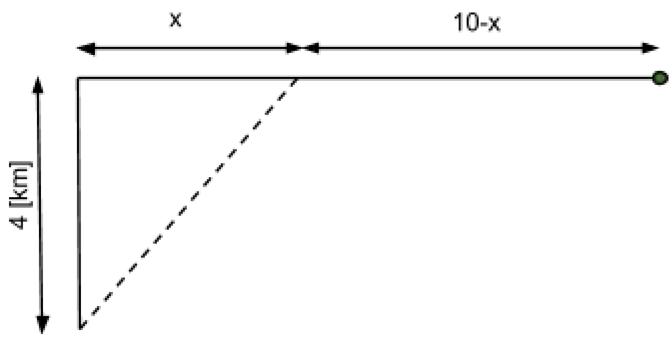
ד.

$$f(x) = e^{sin(x)} \cdot (x-8) \Rightarrow \frac{df}{dx} = e^{sin(x)} \cdot cos(x) \cdot (x-8) + e^{sin(x)} = e^{sin(x)} \cdot (cos(x) \cdot (x-8) + 1)$$

ה.

$$f(x) = \sqrt{e^{x^2+8x} + ln(sin(x))} + 0.123456789 \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{e^{x^2+8x} \cdot (2x+8) + \frac{1}{sin(x)} \cdot cos(x)}{2\sqrt{e^{x^2+8x}+ln(sin(x))}} = \frac{e^{x^2+8x} \cdot (2x+8) + cot(x)}{2\sqrt{e^{x^2+8x}+ln(sin(x))}}$$

19)



האורךשל הקטע בים שבו שוחה דניאל הוא $\sqrt{x^2+4^2}=\sqrt{x^2+16}$, והאורך של הקטע על החוף הוא $10-x$. ולכן הזמן הכולל שלוקח לדניאל: $\Delta r = vt \Rightarrow t=\frac{\Delta r}{v}$

$t=\frac{\sqrt{x^2+16}}{4}+\frac{10-x}{6}$

על מנת למצוא את הזמן המינימלי נגזור ונשווה לאפס:

$\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{8\cdot\sqrt{x^2+16}}-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow \frac{x}{4\cdot\sqrt{x^2+16}}=\frac{1}{6} \Rightarrow 6x=4\cdot\sqrt{x^2+16} \Rightarrow 36x^2=16x^2+256 \Rightarrow 20x^2=256 \Rightarrow x^2=12.8$

$\Rightarrow x=3.577708764$

$\Rightarrow \textit{optimal distance from restaurant}=10-x=6.422291236\approx 6.42\ [km]$

20) נקודה A: $(x_1, 50-2x_1^2)$. היקף המלבן יהיה $P_{erimeter}=2\cdot x_1+2\cdot(50-2x_1^2)$.

כדי למצוא היקף מינימלי נגזור ונשווה לאפס:

$\frac{dP_{erimeter}}{dx_1}=2-8x_1=0 \Rightarrow x_1=0.25$

על מנת לדעת אם זו נקודת מינימום או מקסימום, נגזור ונבדוק זאת:

$\frac{d^2P_{erimeter}}{dx_1^2}=\ -8<0$

ואכן זוהי נקודת מקסימום. והערך של y בנקודה: $y_A=50-2\cdot 0.25^2=49\frac{7}{8}$. שיעורי הנקודה A עבורם ההיקף מקסימלי הם $(0.25, 49\frac{7}{8})$.

שטח המלבן יהיה: $S=x_1\cdot(50-2x_1^2)=50x_1-2x_1^3$, כדי למצוא שטח מקסימלי נגזור ונשווה לאפס:

$\frac{dS}{dx_1}=50-6x_1^2 \Rightarrow x_1=\pm 2.886751346\approx\pm 2.89$

מכיוון שזה ברביע הראשון, ניקח את התוצאה החיובית.

על מנת לדעת אם זו נקודת מינימום או מקסימום, נגזור ונבדוק זאת:

$\frac{d^2S}{dx_1^2}=\ -12x_1;\ \frac{d^2S}{dx_1^2}(x=2.89)=\ \ -12\cdot 2.89=\ -34.6<0$

ואכן זוהי נקודת מקסימום. והערך של y בנקודה: $y_A=50-2\cdot 2.886751346^2=33\frac{1}{3}$. שיעורי הנקודה A עבורם השטח מקסימלי הם $(2.89, 33\frac{1}{3})$.

ההיקף המקסימלי:

$P_{erimeter,max} = 2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 49\frac{7}{8} = 100.25\ [Length]$

השטח המקסימלי:

$S_{max} = 2.886751346 \cdot 33\frac{1}{3} = 96.22504486\ [Length^2]$

21)א.

$\int(8x^2 + 5x - 3.5)dx = \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3.5x + C$

ב.

$\int(\frac{x}{12} + 333 - 22\sqrt{x})dx = \frac{1}{24}x^2 + 333x + \frac{2}{3} \cdot 22 \cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{24}x^2 + 333x + \frac{44}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$

ג.

$\int(\sqrt{6-x} - \sqrt{x+4})dx = \frac{-2}{3} \cdot (6-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot (x+4)^{\frac{3}{2}} + C$

ד.

$\int(\frac{4}{x^2} + 4(x + \frac{2}{x^3}) - 1)dx = \frac{-4}{x} + 2x^2 - \frac{4}{x^2} - x + C$

ה.

$\int(sin(x) - cos(3x+1) + 1 + tan^2x)dx \Rightarrow (tanx)' = 1 + tan^2x \Rightarrow - cos(x) - \frac{1}{3}sin(3x+1) + tan(x) + C$