1) א. כל x ממשי.

ב. על מנת שהפונקציה תהיה ממשית, מה שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי כלומר:
$x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$.

ג. אם המכנה יתאפס אזי הפונקציה תתבדר ולכן: $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$

ד. אם התוכן של לוגריתם מתאפס הלוגריתם הולך למינוס אינסוף. והלוגריתם בנוסף לא מחזיר ערך ממשי עבור ערכים שליליים. לכן, על מנת שהפונקציה תהיה ממשית עליו לקבל ערכים חיוביים. זה חל על שני ה ln:

$$x+4>0 \; and \; x+1>0 \Rightarrow x>-4 \; and \; x>-1 \Rightarrow x>-1$$

ה. האקפוננט מוגדר עבור כל ערך ממשי. יש x במכנה ולכן: $x\neq 0$.

2) א. ה ln באקספוננט לא יכול לקבל ערכים שליליים או אפס על מנת שהפונקציה תהיה ממשי:
$x>0$

(בתחום זה $e^{ln(x)}=x$, אך למרות זאת חייבים להחיל את התנאי שכן הפונקציה הנתונה שונה מ x).

ב. התוכן של שורש צריך להיות אי-שלילי והתוכן של הלוגריתמים צריך להיות חיובי:

$$ln(x-8)-ln(1-x)\geq 0 \; and \; x-8>0 \; and \; 1-x>0 \Rightarrow ln(x-8)\geq ln(1-x) \; and \; x>8 \; and \; x<1$$
$$\Rightarrow e^{ln(x-8)}\geq e^{ln(1-x)} \Rightarrow x-8>1-x \; and \; 1<x<8 \Rightarrow 2x>9 \; and \; 1<x<8$$
$$\Rightarrow x>4.5 \; and \; 1<x<8 \Rightarrow 4.5<x<8$$

ג. תוכן של שורש צריך להיות אי-שלילי, ומה שבמכנה צריך שלא להתאפס. ביחד:

$$4-x\geq 0 \; and \; \sqrt{4-x}\neq 0 \Rightarrow 4-x>0$$

לכן התנאים:

$$4-x>0 \; and \; 16-10x+x^2>0 \Rightarrow x<4 \; and \; (x-8)(x-2)>0 \Rightarrow x<4 \; and \; \{x<2 \; or \; x>8\}$$
$$\Rightarrow x<2$$

ד. האקספוננט לא משנה, מבחינת השורש צריך שהתוכן יהיה אי-שלילי ומבחינת ה ln שהתוכן יהיה חיובי:

$$ln(x^2-13x-30)\geq 0 \; and \; x^2-13x-30>0 \Rightarrow e^{ln(x^2-13x-30)}\geq e^0 \; and \; (x-3)(x-10)>0$$
$$\Rightarrow x^2-13x-30\geq 1 \; and \; \{x<3 \; or \; x>10\} \Rightarrow x^2-13x-31\geq 0 \; and \; \{x<3 \; or \; x>10\}$$

נבדוק מה השורשים של הפולינום:

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169+124}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{293}}{2}=\frac{13\pm17.11724277}{2}\Rightarrow x_1=15.05862138;\ x_2=\ -2.058621385$$

ומזה יוצא:

$$\Rightarrow\{x\le-2.058621385\ or\ x\ge15.05862138\}\ and\ \{x<3\ or\ x>10\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\le-2.058621385\ or\ x\ge15.05862138\approx x\le-2.06\ or\ x\ge15.06$$

3)א.

$$8^{x-2}=(\tfrac{1}{4})^{4x+1}\Rightarrow(2^3)^{x-2}=(2^{-2})^{4x+1}\Rightarrow2^{3x-6}=2^{-8x-2}\Rightarrow3x-6=\ -8x-2\Rightarrow11x=4\Rightarrow x=\tfrac{4}{11}$$

ב.

$$2^{x+4}+2^{x+2}=80\Rightarrow2^4\cdot2^x+2^2\cdot2^x=80\Rightarrow(16+4)\cdot2^x=80\Rightarrow2^x=\tfrac{80}{20}=4=2^2\Rightarrow x=2$$

ג.

$$10^x+5^{x+1}\cdot2^x=600\Rightarrow10^x+5\cdot5^x\cdot2^x=600\Rightarrow10^x+5\cdot10^x=600$$
$$\Rightarrow6\cdot10^x=600\Rightarrow10^x=100=10^2\Rightarrow\ x=2$$

ד.

$$\tfrac{5}{36^x-1}+\tfrac{6}{6^x+1}=1\Rightarrow5\cdot(6^x+1)+6\cdot(36^x-1)=(6^x+1)\cdot(36^x-1)$$
$$\Rightarrow5\cdot6^x+5+6\cdot36^x-6=6^x\cdot36^x+36^x-6^x-1\Rightarrow5\cdot6^x+6\cdot(6^2)^x=6^x\cdot(6^2)^x+(6^2)^x-6^x$$
$$\Rightarrow5\cdot6^x+6\cdot6^{2x}=6^{3x}+6^{2x}-6^x\Rightarrow6^{3x}-5\cdot6^{2x}-6\cdot6^x=0\Rightarrow6^{2x}-5\cdot6^x-6=0$$

בצעד האחרון חילקנו ב6^x מכיוון שהוא לא יכול להיות שווה לאפס. נכנה $t=6^x$ ואז:

$$t^2-5t-6=0\Rightarrow(t-6)(t+1)=0\Rightarrow t=6\ or\ t=\ -1\Rightarrow6^x=6\ or\ 6^x=\ -1$$

כשהשיוויון הימני לא מתקיים עבור אף מספר ממשי. התשובה הסופית היא $x=1$.

ה.

$$9\cdot4^x-12\cdot6^x=\ -4\cdot9^x\Rightarrow9\cdot(2^2)^x-12\cdot(3\cdot2)^x=\ -4\cdot(3^2)^x$$

נחלק ב$(3^2)^x$ ונעביר אגף:

$$9\cdot(\tfrac{2}{3})^{2x}-12\cdot(\tfrac{2}{3})^x+4=0\Rightarrow(\tfrac{2}{3})^{2x}-\tfrac{12}{9}\cdot(\tfrac{2}{3})^x+\tfrac{4}{9}=0$$

נכנה $t=(\tfrac{2}{3})^x$ ואז:

$$\Rightarrow t^2-\tfrac{4}{3}\cdot t+\tfrac{4}{9}=0\Rightarrow(t-\tfrac{2}{3})^2=0\Rightarrow t=(\tfrac{2}{3})^x=\tfrac{2}{3}\Rightarrow x=1$$

4) א.

$$2^x<8^{\frac{x}{3}}\Rightarrow\ 2^x<(8^{\frac{1}{3}})^x\Rightarrow2^x<2^x\Rightarrow\ No\ solution$$

אין פתרון.

ב.

$(\frac{1}{2})^{2x^2}-(\frac{1}{4})^{10x-16}>0 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{2x^2}>((\frac{1}{2})^2)^{10x-16} \Rightarrow 2x^2<2\cdot(10x-16)$

מכיוון שהבסיס הוא בין 0 ל1 כיוון אי השיוויון מתהפך:

$\Rightarrow x^2-10x+16<0 \Rightarrow (x-8)(x-2)<0 \Rightarrow 2<x<8$

ג.

$2^{x^3}\cdot(\frac{1}{8})^{x^2}>4^{-x} \Rightarrow 2^{x^3}\cdot(2^{-3})^{x^2}>(2^2)^{-x} \Rightarrow 2^{x^3-3x^2}>2^{-2x} \Rightarrow x^3-3x^2>-2x \Rightarrow x^3-3x^2+2x>0$

$\Rightarrow x\cdot(x^2-3x+2)>0 \Rightarrow x\cdot(x-2)\cdot(x-1)>0$

נציב ערכים שונים ונבדוק: עבור $x=-1$ למשל $-1\cdot(-3)\cdot(-2)<0$. עבור $x=0.5$: $0.5\cdot(-1.5)\cdot(-0.5)>0$, עבור $x=1.5$ נקבל: $1.5\cdot(-0.5)\cdot 0.5<0$ ועבור $x=3$ נקבל $3\cdot 1\cdot 2>0$. תשובה סופית: $0<x<1 \text{ or } x>2$.

ד.

$2^{2x}+8<2^{x+2}+2^{x+1} \Rightarrow 2^{2x}+8<2^2\cdot 2^x+2\cdot 2^x \Rightarrow 2^{2x}-6\cdot 2^x+8<0 \Rightarrow (2^x)^2-6\cdot 2^x+8<0$

נציב $t=2^x$:

$\Rightarrow t^2-6t+8<0 \Rightarrow (t-4)(t-2)<0 \Rightarrow 2<t<4 \Rightarrow 2^1<2^x<2^2 \Rightarrow 1<x<2$

ה.

$(\frac{x-1}{4-x})^{x+4}>(\frac{x-1}{4-x})^{6-4x}$

במקרה זה, ראשית יש להתחשב בתחום הגדרה. גם שהמכנה לא יתאפס וגם שהבסיס כולו יהיה חיובי:

$4-x\neq 0 \text{ and } \frac{x-1}{4-x}>0 \Rightarrow x\neq 4 \text{ and } 1<x<4 \Rightarrow 1<x<4$

וכעת נפתור את אי השיוויון עצמו. ראשית, אם הבסיס יהיה שווה אחד אזי שני הצדדים יהיו שווים ולכן נדרוש:

$\frac{x-1}{4-x}\neq 1 \Rightarrow x-1\neq 4-x \Rightarrow 2x\neq 3 \Rightarrow x\neq\frac{3}{2}$

כעת, עבור בסיס מעל 1 אי השיוויון שומר על כיוונו ועל בסיס בין 0 ל1 הוא משנה את כיוונו לכן:

$\{\frac{x-1}{4-x}>1 \text{ and } x+4>6-4x\} \text{ or } \{0<\frac{x-1}{4-x}<1 \text{ and } x+4<6-4x\}$

נפתור קודם את השמאלי:

$\{\frac{x-1}{4-x}-1>0 \text{ and } 5x>2 \Rightarrow \frac{x-1-4+x}{4-x}>0 \text{ and } x>\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2(x-\frac{5}{2})}{4-x}>0 \text{ and } x>\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{5}{2}<x<4 \text{ and } x>\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \frac{5}{2}<x<4$

שזה גם מקיים את תחום ההגדרה ואת התנאי על הבסיס. כעת, לימני, כשאנו מזניחים את החלק השמאלי ביותר שכן זהו תחום ההגדרה וחושב כבר:

$\frac{x-1}{4-x}<1 \text{ and } 5x<2 \Rightarrow \frac{2(x-\frac{5}{2})}{4-x}<0 \text{ and } x<\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \{x<\frac{5}{2} \text{ or } x>4\} \text{ and } x<\frac{2}{5} \Rightarrow x<\frac{2}{5}$

ועכשיו, כל התנאים:

$1 < x < 4 \ and \ x \neq \frac{3}{2} and \ \{\frac{5}{2} < x < 4 \ or \ x < \frac{2}{5}\}$

$\Rightarrow \frac{5}{2} < x < 4 \ or \ No \ solution \Rightarrow \frac{5}{2} < x < 4$

5) א. ראשית, נבדוק את תחום ההגדרה. במקרה הזה, תחום ההגדרה הוא פשוט $x > 0$.

$log_2(x) = 4 \Rightarrow 2^{log_2(x)} = 2^4 \Rightarrow x = 16$

ב. תחום ההגדרה: $27x > 0 \ and \ 3x + 4 > 0 \Rightarrow x > 0 \ and \ x > -\frac{4}{3} \Rightarrow x > 0$.

$log_3(27x) = log_3(3x+4) + 4 \Rightarrow 3^{log_3(27x)} = 3^{log_3(3x+4)+4} \Rightarrow 27x = 3^{log_3(3x+4)} \cdot 3^4 = (3x+4) \cdot 81$

$\Rightarrow x = 3 \cdot (3x+4) = 9x + 12 \Rightarrow 8x = \ -12 \Rightarrow x = -1.5$

אך יש להתחשב בתחום ההגדרה של המשוואה המקורית, שכן לוגריתם מוגדר רק עבור ערכים חיוביים.

פתרון זה לא נמצא בתחום ההגדרה ולכן למשוואה <u>אין פתרון ממשי</u>.

ג. תחום ההגדרה: $x > 0$.

$log_2(x) + log_3(x) = 3 \Rightarrow log_2(x) + \frac{log_2(x)}{log_2(3)} = 3 \Rightarrow (1 + \frac{1}{log_2(3)}) \cdot log_2(x) = 3 \Rightarrow 1.630929754 \cdot log_2(x) = 3$

$\Rightarrow log_2(x) = 1.839441578 \Rightarrow 2^{log_2(x)} = 2^{1.839441578} \Rightarrow x = 3.578714808 \approx 3.58$

ד. תחום ההגדרה: $x^2 > 0 \ and \ x + 5 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \ and \ x > -5$.

$log_4(x^2) - 1 = log_2(x+5) \Rightarrow log_4(x^2) - 1 = \frac{log_4(x+5)}{log_4(2)} = 2 \cdot log_4(x+5) \Rightarrow 4^{log_4(x^2)-1} = 4^{2 \cdot log_4(x+5)}$

$\Rightarrow 4^{log_4(x^2)} \cdot 4^{-1} = (4^{log_4(x+5)})^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot x^2 = (x+5)^2 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 + 10x + 25 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 13\frac{1}{3}x + 33\frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-13\frac{1}{3} \pm \sqrt{177\frac{7}{9} - 133\frac{1}{3}}}{2} = \frac{-13\frac{1}{3} \pm \sqrt{44\frac{4}{9}}}{2} = \frac{-13\frac{1}{3} \pm 6\frac{2}{3}}{2} = \frac{-10}{3} \ or \ -10$

אך יש להתחשב בתחום ההגדרה של המשוואה המקורית, שכן לוגריתם מוגדר רק עבור ערכים חיוביים. וכך נפסלת אחת התשובות: כדי שהמשוואה המקורית תענה על התנאי צריך להתקיים $x > -5$, ולכן התשובה הסופית היא $x = \frac{-10}{3}$.

ה. תחום ההגדרה: $x > 0 \ and \ x - 8 > 0 \Rightarrow x > 0 \ and \ x > 8 \Rightarrow x > 8$.

$log_x(x) + log_x(x-8) = 2 \Rightarrow log_x(x \cdot (x-8)) = 2 \Rightarrow x^{log_x(x \cdot (x-8))} = x^2 \Rightarrow x^2 - 8x = x^2 \Rightarrow -8x = 0$

אבל לוגריתם מוגדר רק עבור ערכים חיוביים, ולכן x=0 לא בתחום ההגדרה, כלומר <u>אין פתרון ממשי.</u>

ו.

$log_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{2} \cdot log_{\frac{1}{3}}(x) = \ -3$

ראשית תחום ההגדרה $x > 0$.

$log_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{2} \cdot log_{\frac{1}{3}}(x) = \ -3 \Rightarrow log_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}}) - log_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{2}}) = \ -3 \Rightarrow log_{\frac{1}{3}}(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}) = \ -3 \Rightarrow log_{\frac{1}{3}}(x) = \ -3$

$\Rightarrow (\frac{1}{3})^{log_{\frac{1}{3}}(x)} = (\frac{1}{3})^{-3} \Rightarrow x = 27$

6)א.

$log_4(5x) < log_4(x+8)$

יש להתחשב גם בתחום ההגדרה. תחום ההגדרה:

$5x > 0 \; and \; x+8 > 0 \Rightarrow x > 0 \; and \; x > -8 \Rightarrow x > 0$

$log_4(5x) < log_4(x+8) \Rightarrow 5x < x+8 \Rightarrow 4x < 8 \Rightarrow x < 2$

$\Rightarrow x > 0 \; and \; x < 2 \Rightarrow 0 < x < 2$

ב.

$log_2(x) + 1 > log_4(2-x)$

תחום הגדרה:

$x > 0 \; and \; 2-x > 0 \Rightarrow x > 0 \; and \; x < 2 \Rightarrow 0 < x < 2$

$log_2(x) + 1 > log_4(2-x) \Rightarrow log_2(x) + 1 > \frac{log_2(2-x)}{log_2(4)} \Rightarrow 2 \cdot log_2(x) + 2 > log_2(2-x)$

$\Rightarrow 2^{2 \cdot log_2(x)+2} > 2^{log_2(2-x)} \Rightarrow 2^{log_2(x^2)} \cdot 2^2 > 2^{log_2(2-x)} \Rightarrow 4x^2 > 2-x \Rightarrow 4x^2 + x - 2 > 0$

נבדוק מה השורשים של הפולינום:

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1}{8}(\sqrt{33}-1) \; or \; \frac{-1}{8}(1+\sqrt{33})$

$\Rightarrow 4 \cdot (x - \frac{1}{8}(\sqrt{33}-1)\;) \cdot (x + \frac{1}{8}(1+\sqrt{33})) > 0$

ויוצא ש:

$x < \frac{-1}{8}(1+\sqrt{33}) \; or \; x > \frac{1}{8}(\sqrt{33}-1)$

נשלב עם התנאים על תחום הגדרה:

$x < \frac{-1}{8}(1+\sqrt{33}) \; or \; x > \frac{1}{8}(\sqrt{33}-1) \; and \; 0 < x < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{8}(\sqrt{33}-1) < x < 2$

ג.

$ln(x) > ln(2x+32)$

תחום הגדרה:

$x > 0 \; and \; 2x+32 > 0 \Rightarrow \; x > 0 \; and \; x > -16 \Rightarrow x > 0$

$ln(x) > ln(2x+32) \Rightarrow x > 2x+32 \Rightarrow x < -32$

ונשלב

$x < -32 \; and \; x > 0 \Rightarrow \; No \; solution$

אין פתרון.

ד. $log_{\frac{1}{2}}(9 \cdot 2^x - 19 - 4^x) < 0$ קודם כל, תחום ההגדרה:

$9 \cdot 2^x - 19 - 4^x > 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 19 < 0$

נכנה את $t = 2^x$, נקבל $t^2 - 9t + 19 < 0$, נמצא את שורשי הפולינום:

$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-76}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{9-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{9+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{9-\sqrt{5}}{2} < 2^x < \frac{9+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow log_2(\frac{9-\sqrt{5}}{2}) < x < log_2(\frac{9+\sqrt{5}}{2})$

$\Rightarrow 1.757862161 < x < 2.490065353 \approx 1.76 < x < 2.49$

כעת נפתור, כשנזכור שהעלת חצי באי השיוויון תגרום להתהפכות הכיוון:

$(\frac{1}{2})^{log_{\frac{1}{2}}(9 \cdot 2^x - 19 - 4^x)} > (\frac{1}{2})^0 \Rightarrow 9 \cdot 2^x - 19 - 4^x > 1 \Rightarrow (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 20 < 0$

נכנה את $t = 2^x$, נקבל:

$t^2 - 9t + 20 < 0 \Rightarrow (t-5)(t-4) < 0 \Rightarrow 4 < t < 5 \Rightarrow 4 < 2^x < 5 \Rightarrow log_2(4) < x < log_2(5)$

$\Rightarrow 2 < x < 2.321928095 \approx 2 < x < 2.32$

$1.76 < x < 2.49 \; and \; 2 < x < 2.32 \Rightarrow 2 < x < 2.32$

ה. $log_2(x-1) > log_{\frac{1}{2}}(x-1)$. תחום ההגדרה הוא $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.

$log_2(x-1) > \frac{log_2(x-1)}{log_2(\frac{1}{2})} \Rightarrow log_2(x-1) > -log_2(x-1) \Rightarrow 2log_2(x-1) > 0 \Rightarrow 2^{log_2(x-1)} > 2^0 \Rightarrow x-1 > 1$

$\Rightarrow x > 2$

ו. $log_{0.2}(\sqrt{x}) > log_5(x)$. תחום ההגדרה הוא $x > 0$.

$log_{0.2}(\sqrt{x}) > log_5(x) \Rightarrow log_{0.2}(x^{\frac{1}{2}}) > log_5(x) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot log_{0.2}(x) > log_5(x) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{log_5(x)}{log_5(0.2)} > log_5(x)$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} log_5(x) > log_2(x) \Rightarrow 1.5 \cdot log_5(x) < 0 \Rightarrow 5^{log_5(x)} < 5^0 \Rightarrow x < 1$

ויחד עם תחום ההגדרה נקבל: $0 < x < 1$.

7)א.

$|3x-1| > |x+3| \Rightarrow -|3x-1| < x+3 < |3x-1| \Rightarrow -|3x-1| < x+3 \; and \; x+3 < |3x-1|$

$\Rightarrow |3x-1| > -(x+3) \; and \; |3x-1| > x+3$

$\Rightarrow \{3x-1 > -(x+3) \;\; or \; (3x-1) < (x+3)\} and \; \{3x-1 > x+3 \; or \; 3x-1 < -x-3\}$

$\Rightarrow \{4x > -2 \; or \; 2x < 4\} and \; \{2x > 4 \; or \; 4x < -2\}$

$\Rightarrow \{x > -0.5 \; or \; x < 2\} and \; \{x > 2 \; or \; x < -0.5\}$

$\Rightarrow \{any \; real \; x\} \; and \; \{|x < -\frac{1}{2} \; or \; x > 2\} \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \; or \; x > 2$

ב.

$x^2 - 8x \geq 0 \Rightarrow x(x-8) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \; or \; x \geq 8$

ג.

$\sqrt{x-4} + \sqrt{2x-3} \geq \sqrt{7-x}$

על מנת שהתוצאות יהיו ממשיות, צריכים להתקיים:

$x-4\geq 0$ *and* $2x-3\geq 0$ *and* $7-x\geq 0 \Rightarrow x\geq 4$ *anf* $x\geq 1.5$ *and* $x\leq 7 \Rightarrow 4\leq x\leq 7$

שני הצדדים באי השיוויון חיוביים ולכן נעלה בריבוע ללא חשש:

$\Rightarrow x-4+2\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{2x-3}+2x-3\geq 7-x$

$\Rightarrow 2\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{2x-3}\geq 14-4x \Rightarrow \sqrt{x-4}\cdot\sqrt{2x-3}\geq 7-2x$

הפעם ניזהר כשנעלה בריבוע:

$\Rightarrow \{7-2x\geq 0 \text{ and } (x-4)\cdot(2x-3)\geq(7-2x)^2\} \text{ or } \{7-2x<0 \text{ and } (x-4)\cdot(2x-3)\leq(7-2x)^2\}$

צד שמאל מביא:

$\Rightarrow x\leq\frac{7}{2} \text{ and } (x-4)\cdot(2x-3)\geq(7-2x)^2 \Rightarrow 2x^2-3x-8x+12\geq 49-28x+4x^2 \Rightarrow 2x^2-17x+37\leq 0$

אשר לו אין פתרון.

צד ימין מביא:

$\Rightarrow x>\frac{7}{2} \text{ and } 2x^2-17x+37\geq 0 \Rightarrow x>3.5 \text{ and } \{\text{any real } x\} \Rightarrow x>3.5$

ואם מכלילים את תחום ההגדרה:

$\Rightarrow 4\leq x\leq 7 \text{ and } \{\text{No solution or } x>3.5\} \Rightarrow 4\leq x\leq 7$

ד.

$x^2-|2x-9|\leq 8 \Rightarrow |2x-9|\geq x^2-8 \Rightarrow 2x-9\geq x^2-8 \text{ or } 2x-9\leq -x^2+8$

$\Rightarrow 0\geq x^2-2x+1 \text{ or } x^2+2x-17\leq 0 \Rightarrow (x-1)^2\leq 0 \text{ or } x^2+2x-17\leq 0$

$\Rightarrow x=1 \text{ or } x^2+2x-17\leq 0$

נבדוק מה השורשים של הפולינום:

$x^2+2x-17=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+68}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{72}}{2}=\ -1\pm\sqrt{18}=\ -1\pm 3\sqrt{2}$

אזי

$\Rightarrow x=1 \text{ or } x^2+2x-17\leq 0 \Rightarrow x=1 \text{ or } \ -1-3\sqrt{2}\leq x\leq 3\sqrt{2}-1$

$\Rightarrow -1-3\sqrt{2}\leq x\leq 3\sqrt{2}-1$

8)א.

$|x^2-4x-5|\leq 2x^2 \Rightarrow -2x^2\leq x^2-4x-5\leq 2x^2 \Rightarrow 3x^2-4x-5\geq 0 \text{ and } x^2+4x+5\geq 0$

נתחיל עם אי השיוויון השמאלי. ראשית, נמצא את השורשים של הפולינום:

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+60}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{76}}{6}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{2\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{19}{9}}=\frac{1}{3}\cdot(2\pm\sqrt{19})$

$\Rightarrow 3\cdot(x-\frac{1}{3}\cdot(2+\sqrt{19}))\cdot(x-\frac{1}{3}\cdot(2-\sqrt{19}))\geq 0 \Rightarrow x\leq\frac{1}{3}\cdot(2-\sqrt{19}) \text{ or } x\geq\frac{1}{3}\cdot(2+\sqrt{19})$

ונעבור לאי השיוויון הימני. ראשית, נמצא את השורשים של הפולינום:

$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{6}$

אין לפולינום שורשים ממשיים. קל לראות כי הוא מקיים את אי השיוויון לכל x ממשי, שכן המקדם של ה x^2 חיובי (הוא פרבולה "מחייכת" בלי חיתוך עם ציר הא, לכן בהכרח נמצא תמיד מעליו). לכן:

$\Rightarrow \{x \le \frac{1}{3}\cdot(2-\sqrt{19})\ or\ x \ge \frac{1}{3}\cdot(2+\sqrt{19})\}\ and\ \{any\ real\ x\} \Rightarrow x \le \frac{1}{3}\cdot(2-\sqrt{19})\ or\ x \ge \frac{1}{3}\cdot(2+\sqrt{19})$

ב.

$x\cdot(x^2+10x+5) \le 2x^2+x+48 \Rightarrow x^3+10x^2+5x \le 2x^2+x+48 \Rightarrow x^3+8x^2+4x-48 \le 0$
$\Rightarrow x^3+10x^2+24x-2x^2-20x-48 \le 0 \Rightarrow x\cdot(x^2+10x+24)-2\cdot(x^2+10x+24) \le 0$
$\Rightarrow (x-2)\cdot(x^2+10x+24) \le 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x+4)\cdot(x+6) \le 0$

נהציב מספרים בתחומים הרלוונטיים:
נציב $x=3$: $1\cdot7\cdot9=63>0$, נציב $x=0$: $(-2)\cdot4\cdot6=\ -48<0$, נציב $x=\ -5$: $(-1)\cdot(-1)\cdot1=7>0$, ו $x=-7$: $(-9)\cdot(-3)\cdot(-1)=\ -27<0$ ולכן, הפתרון:
$x \le -6\ or\ -4 \le x \le 2$

ג.

$5x+10 < \sqrt{x}+4x+6 \Rightarrow x+4 < \sqrt{x}$

ראשית, תחום ההגדרה של הבעיה הוא $x \ge 0$ (אחרת יהיה מספר לא ממשי בצד ימין של המשוואה).
על מנת להעלות בריבוע נחלק לתחום בו $x+4 \ge 0$ ותחום בו $x+4<0$:
$\{x+4 \ge 0\ and\ (x+4)^2 < x\}\ or\ \{x+4<0\ and\ (x+4)^2 > x\}$
$\Rightarrow \{x \ge -4\ and\ x^2+8x+16 < x\}\ or\ \{x < -4\ and\ x^2+8x+16 > x\}$
אך ניזכר בתחום ההגדרה $x \ge 0$ ונקבל:
$\Rightarrow \{x \ge 0\ and\ x^2+7x+16<0\}\ or\ \{No\ solution\}$
הדיסקימיננטה של הפולינום: $\Delta=b^2-4ac=49-64=\ -15<0$, כלומר אין שורשים לפולינום.
בנוסף, המקדם של ה x^2 חיובי (פרבולה "מחייכת"), ולכן אין פתרון ממשי לאי השיוויון.

ד.

$12x^2-24x+46 < 2x^3+30 \le 3x^3+7x^2-5x-45$
$\Rightarrow 2x^3-12x^2+24x-16>0\ and\ x^3+7x^2-5x-75 \ge 0$
$\Rightarrow x^3-6x^2+12x-8>0\ and\ x^3+10x^2+25x-3x^2-30x-75 \ge 0$
$\Rightarrow (x-2)^3>0\ and\ x\cdot(x^2+10x+25)-3\cdot(x^2+10x+25) \ge 0$
$\Rightarrow (x-2)^3>0\ and\ (x-3)\cdot(x^2+10x+25) \ge 0$
$\Rightarrow (x-2)^3>0\ and\ (x-3)\cdot(x+5)^2 \ge 0$

קל לראות שאי השיוויון השמאלי מתקיים עבור $x>2$ (הצבה של 1 ו3). נציב באי השיוויון הימני ערכים:
נתחיל ב$x=4$: $1\cdot9^2=81>0$, ו$x=0$: $(-3)\cdot5^2=\ -75<0$, ו$x=\ -6$: $(-9)\cdot(-1)^2=\ -9<0$. וכמובן מתקיים גם עבור $x=\ -5$. לכן:

$\Rightarrow x>2\ and\ \{x\geq 3\ or\ x=\ -5\}\Rightarrow\ x\geq 3$

9) א. $x+4<\frac{12}{x}\ or\ \frac{x-2}{x+2}>2$. נפתור כל צד בנפרד. נזכור שכשמכפילים הערך, אם הוא שלילי הכיוון של אי השיוויון מתחלף ולכן נחלק כל אי שיוויון לשני תחומים. נתחיל בשמאלי:

$x+4<\frac{12}{x}\Rightarrow\{x>0\ and\ x^2+4x<12\}\ or\ \{x<0\ and\ x^2+4x>12\}$

$\{x>0\ and\ x^2+4x-12<0\}\ or\ \{x<0\ and\ x^2+4x-12>0\}$

$\Rightarrow\{x>0\ and\ (x+6)(x-2)<0\}\ or\ \{x<0\ and\ (x+6)(x-2)>0\}$

$\Rightarrow\{x>0\ and\ -6<x<2\}\ or\ \{x<0\ and\ \{x<-6\ or\ x>2\}\}\Rightarrow 0<x<2\ or\ x<-6$

ועכשיו השמאלי:

$\frac{x-2}{x+2}>2\Rightarrow\{x+2>0\ and\ x-2>2x+4\}\ or\ \{x+2<0\ and\ x-2<2x+4\}$

$\Rightarrow\{x>-2\ and\ -6>x\}\ or\ \{x<-2\ and\ -6<x\}\Rightarrow No\ solution\ or\ -6<x<-2\Rightarrow -6<x<-2$

ולכן תשובה סופית:

$\{0<x<2\ or\ x<-6\}\ or\ -6<x<-2\Rightarrow 0<x<2\ or\ \{x<-2,\ x\neq -6\}$

ב. $x-8\sqrt{x}<4\ and\ 2x+8>x^2$. עבור תשובה ממשית צריך להתקיים $x\geq 0$ בשמאלי בגלל השורש.

$\{x\geq 0\ and\ x-8\sqrt{x}<4\}\ and\ 2x+8>x^2\Rightarrow\{x\geq 0\ and\ x-4<8\sqrt{x}\}\ and\ 0>x^2-2x-8$

ניתן להעלות בריבוע את אי השיוויון עם השורש אבל נחלק למקרים כמו בשאלה הקודמת. נפתור קודם את אי השיוויון הימני לבד:

$x^2-2x-8<0\Rightarrow(x-4)(x+2)<0\Rightarrow -2<x<4$

וכעת לאי השיוויון השמאלי:

$x\geq 0\ and\ \{\{x-4>0\ and\ (x-4)^2<64x\}\ or\ \{x-4<0\ and\ (x-4)^2>64x\}\}$

$x\geq 0\ and\ \{\{x>4\ and\ x^2-8x+16<64x\}\ or\ \{x<4\ and\ x^2-8x+16>64x\}\}$

$x\geq 0\ and\ \{\{x>4\ and\ x^2-72x+16<0\}\ or\ \{x<4\ and\ x^2-72x+16>0\}\}$

נמצא את שורשי הפולינום:

$x_{1,2}=\frac{72\pm\sqrt{5184-64}}{2}=\frac{72\pm\sqrt{5120}}{2}=\frac{72\pm 71.55417528}{2}\Rightarrow x_1=0.22291236\approx 0.22;\ \ x_2=71.77708764\approx 71.78$

ואז:

$x\geq 0\ and\ \{\{x>4\ and\ (x-71.78)(x-0.22)<0\}\ or\ \{x<4\ and\ (x-71.78)(x-0.22)>0\}\}$

$x\geq 0\ and\ \{\{x>4\ and\ 0.22<x<71.78\}\ or\ \{x<4\ and\ \{x<0.22\ or\ x>71.78\}\}\}$

$x\geq 0\ and\ \{4<x<71.78\ or\ x<0.22\}\Rightarrow 0\leq x<0.22\ or\ 4<x<71.78$

תשובה סופית:

$\{0\leq x<0.21\ or\ 4<x<71.79\}\ and\ -2<x<4\Rightarrow 0\leq x<0.21$

ג.

$$3^{x+4} < 9^{x^2+6} \le 3^{5x^2+10} \Rightarrow\ 3^{x+4} < (3^2)^{x^2+6}\ and\ (3^2)^{x^2+6} \le 3^{5x^2+10} \Rightarrow\ 3^{x+4} < 3^{2x^2+12}\ and\ 3^{2x^2+12} \le 3^{5x^2+10}$$
$$\Rightarrow x+4 < 2x^2+12\ and\ 2x^2+12 \le 5x^2+10 \Rightarrow 2x^2-x+8>0\ and\ 3x^2-2 \ge 0$$

נמצא את השורשים של הפולינום השמאלי:

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-32}}{2} \Rightarrow No\ solution$$

ולכן אי השיוויון השמאלי נכון לכל x ממשי. ואז:

$$\{any\ real\ x\}\ and\ 3\cdot(x-\sqrt{\tfrac{2}{3}})(x+\sqrt{\tfrac{2}{3}}) \ge 0$$
$$\Rightarrow \{any\ real\ x\}\ and\ \{x \le -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\ or\ x \ge \sqrt{\tfrac{2}{3}}\} \Rightarrow x \le -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\ or\ x \ge \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

ד.

$$log_2(x-1) < 2+log_2(2x) < log_2(x^2-x)$$

ראשית תחום הגדרה:

$$x-1>0\ and\ 2x>0\ and\ x^2-x>0 \Rightarrow x>1\ and\ x>0\ and\ x(x-1)>0$$
$$\Rightarrow x>1\ and\ x>0\ and\ \{x>1\ or\ x<0\} \Rightarrow x>1$$
$$log_2(x-1) < 2+log_2(2x) < log_2(x^2-x) \Rightarrow 2^{log_2(x-1)} < 2^{2+log_2(2x)} < 2^{log_2(x^2-x)}$$
$$\Rightarrow x-1 < 2^2\cdot 2x\ and\ 2^2\cdot 2x < x^2-x \Rightarrow x-1<8x\ and\ 8x<x^2-x \Rightarrow 7x>-1\ and\ x^2-9x>0$$
$$\Rightarrow x > \tfrac{-1}{7}\ and\ x(x-9)>0 \Rightarrow x>\tfrac{-1}{7}\ and\ \{x>9\ or\ x<0\} \Rightarrow \tfrac{-1}{7}<x<0\ or\ x>9$$

נשלב עם תחום ההגדרה:

$$\{\tfrac{-1}{7}<x<0\ or\ x>9\}\ and\ x>1 \Rightarrow x>9$$

ה. $\{\sqrt{10x-20} > \sqrt{4x^2-30x+80}\ or\ \frac{5x^2+26x+25}{x^2-36}-4<0\}\ and\ \{-4x^{-2}+1>0\ge -x^2+5x+6\}$.

זו מערכת אי שיוויונים עמוסה, נפתור אחד אחד משמאל לימין: $\sqrt{10x-20} > \sqrt{4x^2-30x+80}$

נבדוק את תחום ההגדרה ואז נעלה בריבוע שכן השורשים יהיו חיוביים:

$$10x-20>0\ and\ 10x-20>4x^2-30x+80 \Rightarrow x>2\ and\ 4x^2-40x+100<0$$
$$\Rightarrow x>2\ and\ x^2-10x+25<0 \Rightarrow x>2\ and (x-5)^2<0\ \Rightarrow x>2\ and\ No\ solution \Rightarrow No\ solution$$

אי השיוויון הבא: $\frac{5x^2+26x+25}{x^2-36}-4<0$ (תחום הגדרה ש $x \ne \pm 6$)

$$\frac{5x^2+26x+25}{x^2-36}-4<0 \Rightarrow \frac{5x^2+26x+25-4x^2+144}{x^2-36}<0 \Rightarrow \frac{x^2+26x+169}{(x+6)(x-6)}<0 \Rightarrow \frac{(x+13)^2}{(x+6)(x-6)}<0$$

המונה חיובי תמיד חוץ מב13=x בו הוא מתאפס. אם כך, השבר כולו יהיה שלילי כשהמכנה יהיה שלילי כלומר כש:

$$(x+6)(x-6)<0 \Rightarrow -6<x<6$$

אי השיוויון השלישי: $-4x^{-2}+1>0$ (תחום הגדרה של $x\ne 0$):

$$\Rightarrow \tfrac{-4}{x^2}+1>0 \Rightarrow \tfrac{x^2-4}{x^2}>0 \Rightarrow \tfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}>0$$

יכלנו להכפיל ב x^2 בבטחה שכן הוא תמיד אי-שלילי. בנוסף לכך, זה אומר שמי שקובע זה המונה הפעם ולכן צריך לבדוק מתי הוא חיובי:

$\Rightarrow (x+2)(x-x) > 0 \Rightarrow x < -2 \; or \; x > 2$

אי השיוויון האחרון, $0 \geq -x^2+5x+6$:

$x^2-5x-6 \geq 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \; or \; x \geq 6$

נאסוף את הפתרונות:

$\{No \; solution \; or \; -6 < x < 6\} \; and \; \{\{x < -2 \; or \; x > 2\} \; and \; \{x \leq -1 \; or \; x \geq 6\}\}$

$\Rightarrow -6 < x < 6 \; and \; \{x < -2 \; or \; x \geq 6\} \Rightarrow \; -6 < x < -2$

10)א. המעבר ממעלות לרדיאנים: $\alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \alpha \, [rad]$ אזי:

$30^\circ \rightarrow \frac{30}{180}\pi = \frac{\pi}{6}; \; 45^\circ \rightarrow \frac{45}{180}\pi = \frac{\pi}{4}; \; 60^\circ \rightarrow \frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3}; \; 270^\circ \rightarrow \frac{270}{180}\pi = \frac{3\pi}{2}; \; 900^\circ \rightarrow \frac{900}{180}\pi = 5\pi$

$-75^\circ \rightarrow \frac{-75}{180}\pi = \frac{-5\pi}{12}; \; 360^\circ \rightarrow \frac{360}{180}\pi = 2\pi; \; -180^\circ \rightarrow \frac{-180}{180}\pi = \; -\pi$

ב. המעבר מרדיאנים למעלות: $\alpha^\circ = \alpha \, [rad] \cdot \frac{180}{\pi}$ אזי:

$\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{180\pi}{4\pi} = 45^\circ; \; 3\pi \rightarrow \frac{3 \cdot 180\pi}{\pi} = 540^\circ; \; \frac{5\pi}{4} \rightarrow \frac{5 \cdot 180\pi}{4\pi} = 225^\circ; \; \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{180\pi}{2\pi} = 90^\circ; \; \frac{7\pi}{3} \rightarrow \frac{7 \cdot 180\pi}{3\pi} = 420^\circ$

ג. נשתמש כאן בקשרים בין הפונקציות השונות ובינן לבין עצמן:

$tan(150^\circ) = \; -tan(180^\circ - 30^\circ) = \; -tan(30^\circ) = \frac{-sin(30^\circ)}{cos(30^\circ)} = \; -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

ואפשר גם לזכור בעל פה ערך זה.

$sin(240^\circ) = sin(180^\circ - 240^\circ) = sin(-60^\circ) = \; -sin(60^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$cot(\frac{-5\pi}{4}) = cot(2\pi - \frac{5\pi}{4}) = cot(\frac{3\pi}{4}) = \; -cot(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \; -cot(\frac{\pi}{4}) = \; -1$

$cos(\frac{5\pi}{3}) = \; -cos(\pi - \frac{5\pi}{3}) = \; -cos(\frac{-2\pi}{3}) = cos(\pi - \frac{2\pi}{3}) = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

ד.

$sin(320^\circ) = sin(180^\circ - 320^\circ) = sin(-140^\circ) = \; -sin(180^\circ - 140^\circ) = \; -sin(40^\circ) = \; -cos(50^\circ)$

$cos(246^\circ) = \; -cos(180^\circ - 246^\circ) = \; -cos(-66^\circ) = \; -cos(66^\circ) = \; -sin(24^\circ)$

$tan(202^\circ) = \; -tan(180^\circ - 202^\circ) = \; -tan(-22^\circ) = tan(22^\circ) = cot(68^\circ)$

$cot(1.5\pi) = \; -cot(-\frac{\pi}{2}) = cot(\frac{\pi}{2}) = 0$